Domače vaje iz LINEARNE ALGEBRE

Marjeta Kramar Fijavž
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani

2007/08

Kazalo

1 Vektorji

1. V pravilnem tetraedru $ABCD$ tvorijo vektorji $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ bazo prostora. Naj bo P nožišče višine iz točke D na osnovno ploskev ABC in Q nožišče višine iz točke A na ploskev BCD.

   (a) Izrazi vektorja $\overrightarrow{DP}$ in $\overrightarrow{AQ}$ v bazi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

   (b) Pokaži, da se višini DP in AQ sekata. Njuno presečišče označimo z E. Izrazi vektor $\overrightarrow{AE}$ v bazi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

2. Točke A, B, C in D so zaporedna oglišča enakokrakega trapeza. Velja še: $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Naj bo E razpolovišče daljice AD ter S presečišče daljic BE in AC. Označimo: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

   (a) Izrazi vektor $\overrightarrow{BS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   (b) Izračunaj koordinate točke S, če poznaš koordinate točk: $A(5, 4, 1)$, $B(0, -1, 2)$ in $D(5, 9, 3)$.

3. Točke A, B, C, D, E, F, G in H so zaporedna oglišča kocke. Točka S je središče kvadrata $EFGH$, točka M pa deli stranico CG v razmerju $3 : 1$. Naj bo T točka, v kateri se sekata daljici AM in CS. Označimo še: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$.

   (a) Izrazi vektor $\overrightarrow{AT}$ z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$!

   (b) Določi koordinate točke T, če poznamo koordinate naslednjih točk: $A(2, 1, 1)$, $B(4, 1, 1)$, $D(2, 3, 1)$ in $E(2, 1, 3)$!

4. V paralelogramu $ABCD$ označimo: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Točka S leži na diagonali AC in deli AC v razmerju $3 : 1$. Premica skozi točki B in S seka stranico CD v točki X.

   (a) Izrazi vektor $\overrightarrow{AX}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   (b) V kakšnem razmerju deli točka X daljico DC?

   (c) Izračunaj koordinate točke X, če so koordinate točk: $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 2, 3)$ in $C(3, 4, -1)$.

5. Točke A, B, C, D, E in F so zaporedna oglišča pravilnega šestkotnika. Naj bo G razpolovišče daljice FE ter S presečišče daljic GB in AC.

   (a) V kakšnem razmerju deli daljica GB daljico AC?

   (b) Izrazi ploščino trikotnika ABS s ploščino šestkotnika.

6. Dan je trikotnik ABC. Točke P, Q in R delijo stranice AB, BC in CA v razmerju $1:2$. Daljici AQ in CP se sekata v točki D, daljici AQ in BR v točki E, daljici BR in CP pa v točki F. Pokaži, da je ploščina trikotnika DEF enaka $\frac{1}{7}$ ploščine trikotnika ABC.

7. V pravilni štiristrani piramidi $ABCDE$ označimo: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Točka G deli daljico BE v razmerju $3:1$, točka M pa je središče kvadrata $ABCD$.

   (a) Označimo z R presečišče višine ME s premico skozi točki D in G. Izrazi vektor $\overrightarrow{MR}$ z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

   (b) Določi koordinate točke R, če so koordinate točk $A(2,1,2)$, $B(-2,3,1)$, $D(-1,1,0)$ in $E(-1,1,-2)$.

8. Dana sta vektorja $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ in $\vec{b} = \lambda\vec{i} - \vec{j}$, kjer sta $\vec{i}$ in $\vec{j}$ linearno neodvisna vektorja. Določi skalar λ tako, da bosta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna. V tem primeru izrazi vektor $\vec{a}$ z vektorjem $\vec{b}$.

9. Naj bosta $\vec{i}$ in $\vec{j}$ linearno neodvisna vektorja. Z njima se izražajo vektorji: $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ in $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j}$.

   (a) Izrazi vektor $\vec{c}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   (b) Ali sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna?

10. Dana sta vektorja $\vec{m} = 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ in $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, pri čemer poznamo dolžine vektorjev: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$, ter kote med njimi: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{4}$. Vektorja $\vec{m}$ in $\vec{n}$ razpenjata paralelogram. Zapiši vektorja diagonal tega paralelograma in izračunaj njuni dolžini.

11. Dani so vektorji $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\alpha\vec{j}$ in $\vec{c} = 3\alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, kjer so $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ linearno neodvisni vektorji. Določi skalar α tako, da bodo vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ležali na isti ravnini.

12. Naj bodo $\vec{a} = (1, 2\alpha, 1)$, $\vec{b} = (2, \alpha, \alpha)$ in $\vec{c} = (3\alpha, 2, -\alpha)$, kjer je α neko realno število.

    (a) Izračunaj volumen tetraedra, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

    (b) Določi parameter α tako, da bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ ležali na isti ravnini. V tem primeru izrazi $\vec{a}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

13. Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ vektorji iz $\mathbb{R}^3$ z dolžinami: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ in $|\vec{c}| = 1$. Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je enak $\frac{\pi}{3}$, kot med vektorjem $\vec{c}$ ter ravnino, ki jo razpenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa je $\frac{\pi}{6}$. Izračunaj prostornino paralelepipeda, napetega na vektorje: $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$ in $\vec{z} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

14. Paralelogram ima oglišče $A(1,1,1)$ ter stranici $\overrightarrow{AB} = (0,0,1)$ in $\overrightarrow{AD} = (1,-2,1)$. Določi točko E na stranici BC tako, da se bosta daljici AE in BD sekali pod pravim kotom.

15. Točke $A(1,-1,2)$, $B(-1,1,2)$ in $C(1,2,3)$ so oglišča trikotnika ABC. Poišči nožišče višine T iz vrha C na osnovnico AB. Kolikšen je kot med daljicama CT in CB?

16. Dokaži, da so vektorji $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ in $\vec{c} \times \vec{a}$ kolinearni natanko tedaj, ko so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ koplanarni (Nasvet: pomagaj si z mešanim produktom in s formulo za večkratni vektorski produkt tj. Grassmanovo identiteto).

17. Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ napenjajo tetraeder s prostornino 3. Izračunaj prostornino tetraedra, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ in $\vec{c} \times \vec{a}$. (Nasvet: pomagaj si s formulo za večkratni vektorski produkt tj. Grassmanovo identiteto).

18. Pri danih neničelnih vektorjih $\vec{a}$ in $\vec{b}$ poišči tak vektor $\vec{x}$, ki zadošča enačbi:
$$\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}.$$

19. Dani so vektorji: $\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (1,1,0)$ in $\vec{c} = (1,-1,0)$. Poišči tak vektor $\vec{x}$, da bo zadoščal enačbama:
$$\vec{x}\vec{a} = 3 \quad \text{in} \quad \vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}.$$

Rešitve

1. (a) *$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$ in $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.*
   (b) *Višini DP in AQ se sekata, ker točke A, P, Q in D ležijo na isti ravnini. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.*

2. (a) *$\overrightarrow{BS} = -\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$.*
   (b) *$S(4,5,2)$.*

3. (a) $\overrightarrow{AT} = \frac{8}{11}\overrightarrow{a} + \frac{8}{11}\overrightarrow{b} + \frac{6}{11}\overrightarrow{c}$.
   (b) $T(\frac{38}{11}, \frac{27}{11}, \frac{23}{11})$.

4. (a) $\overrightarrow{AX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.
   (b) *Točka* X *deli daljico* DC *v razmerju* $2 : 1$.
   (c) $X(\frac{11}{3}, 4, -1)$.

5. (a) $GB : AC = 3 : 4$.
   (b) $p_{\triangle ABS} = \frac{1}{6}p_{ABCDEF}$.

6. *Najprej dve stranici trikotnika izrazimo z vektorjema* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ *in* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$, *npr.* $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{7}\overrightarrow{a} + \frac{2}{7}\overrightarrow{b}$ *ter* $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{7}\overrightarrow{a} + \frac{1}{7}\overrightarrow{b}$. *Potem je* $p_{\triangle DEF} = |\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{DE}| = \frac{1}{7}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \frac{1}{7}p_{\triangle ABC}$.

7. (a) $\overrightarrow{MR} = -\frac{3}{10}\overrightarrow{a} - \frac{3}{10}\overrightarrow{b} + \frac{3}{5}\overrightarrow{c}$.
   (b) $R\left(-\frac{6}{5}, \frac{7}{5}, -1\right)$.

8. $\lambda = -\frac{2}{3}$ *in v tem primeru je* $\overrightarrow{a} = -3\overrightarrow{b}$.

9. (a) $\overrightarrow{c} = \frac{11}{14}\overrightarrow{a} + \frac{15}{14}\overrightarrow{b}$.
   (b) *Vektorja* $\overrightarrow{a}$ *in* $\overrightarrow{b}$ *sta linearno neodvisna.*

10. $\overrightarrow{e} = 4\overrightarrow{a}$, $|\overrightarrow{e}| = 4$ *ter* $\overrightarrow{f} = -2\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$, $|\overrightarrow{e}| = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$.

11. $\alpha = \pm 1$.

12. (a) $V = \frac{1}{3}(3\alpha^3 - \alpha + 2)$.
    (b) *Vektorji* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *in* $\overrightarrow{c}$ *ležijo na isti ravnini, če je* $\alpha = -1$. *V tem primeru je* $\overrightarrow{a} = -4\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c}$.

13. $V = |[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}]| = 3|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]| = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

14. $E(1, 1, 2)$.

15. *Kot med daljicama* CT *in* CB *je enak* $\arccos\sqrt{\frac{11}{12}} \doteq 16,77^0$.

16. *Vektorja* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *in* $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ *sta kolinearna natanko tedaj, ko je njun vektorski produkt enak* 0. *S pomočjo formule za večkratni vektorski produkt (Grassmanova identiteta) ugotovimo, da to velja natanko tedaj, ko je mešani produkt vektorjev* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *in* $\overrightarrow{c}$ *enak nič oziroma, ko so ti vektorji koplanarni. Enako sklepamo pri vektorjih* $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ *in* $\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$.

17. $V = 54$.

18. $\overrightarrow{x} = \frac{\overrightarrow{b} + \left(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{a} - \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)}{1 + |\overrightarrow{a}|^2}$.

19. $\overrightarrow{x} = (2, 2, -1)$.

2 Analitična geometrija

1. Točke $O(0,0,0)$, $A(1,0,1)$, $B(1,1,2)$ in $C(1,1,1)$ določajo paralelepiped. Poišči:

   (a) enačbo premice - nosilke telesne diagonale iz točke O;

   (b) enačbo ravnine, na kateri leži točka A in je vzporedna z ravnino, ki jo določajo točke O, B in C;

   (c) kot pod katerim telesna diagonala iz O seka ploskev, določeno s točkami O, B in C.

2. Določi takšno točko T na ravnini $x-y+3z=6$, da bo točka $T'(1,-1,2)$ njena pravokotna projekcija na ravnino $x+y+z=2$.

3. Premica q gre skozi točko $T(2,3,2)$ in pod pravim kotom seka premico:

$$p:\ -x = \frac{y+1}{2} = z-2.$$

   Poišči enačbo ravnine, ki vsebuje premico q in točko $R(3,5,5)$. Določi še kot med premico p in dobljeno ravnino.

4. Poišči pravokotno projekcijo premice

$$\frac{x-1}{2} = y-1 = -z$$

   na ravnino, ki jo določajo točke $T_1(1,0,1)$, $T_2(1,1,3)$ in $T_3(5,1,1)$. Kje se sekata premica in njena projekcija?

5. Ravnina Π gre skozi točko $T(3,4,1)$ in je vzporedna premicama:

$$p:\ \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-2} \quad \text{in} \quad q:\ x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

   Poišči enačbo ravnine Π, ter ugotovi, kam se preslika točka $S(1,-2,1)$ pri zrcaljenju čez Π.

6. Poišči enačbo premice, ki gre skozi točko $A(3,-1,-1)$, seka premico $x-2 = \frac{y-5}{2} = \frac{z+3}{-2}$ in je vzporedna ravnini $x+y+z=5$.

7. Poišči najkrajšo razdaljo med premicama $x=-2y=z$ in $x=y=z$.

8. Poišči enačbo premice, ki gre skozi točko $T(1,2,-1)$, ter seka premici

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{3} \quad \text{in} \quad \frac{x+2}{3} = y = \frac{z+3}{-1}.$$

9. Na premici, ki je določena z enačbama $2x-y=2$, $x-y-z=1$, določi točko, ki je enako oddaljena od točke $A(4,1,1)$ in $B(2,1,1)$.

10. Premica p je podana s presekom ravnin $x+y=2$, $z-x=-1$. Določi razdaljo točke $T(1,0,0)$ do premice p. Na premici p poišči točko, ki je oddaljena od točke T za enoto.

11. Poišči enačbo premice, ki leži v ravnini $x-4y+2z=7$, ter pod pravim kotom seka premico, podano s presekom ravnin $x-2y-4z=-3$ in $2x+y-3z=-1$.

12. Premico p dobimo kot presečišče ravnin

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 13, \\ 3x+y+4z &= 14. \end{aligned}$$

Na premici p določi tako točko T, da bo točka $P(0,3,1)$ njena pravokotna projekcija na premico

$$q: \frac{x}{3} = 3-y = z-1.$$

Kolikšna je razdalja med točko T in premico q?

13. Dani sta premici:

$$p: x+1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3} \quad \text{in} \quad q: \frac{5-x}{3} = \frac{y-1}{2} = z+1.$$

Poišči enačbo ravnine Σ, ki vsebuje premico p in je vzporedna premici q. Kolikšna je razdalja premice q do ravnine Σ?

14. Skozi točki $A(1,0,-2)$ in $B(0,2,2)$ položi ravnino, ki je vzporedna premici p, določeni z enačbama: $x+y-z=0$, $x-2y+z=1$. Kolikšna je razdalja premice p do dobljene ravnine?

15. Poišči pravokotno projekcijo premice

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{-y-2}{3} = \frac{z+1}{-3}$$

na ravnino, ki koordinatne osi seka pri $x=2.5$, $y=-5$ in $z=5$. Kje se sekata premica in njena projekcija?

Rešitve

1. (a) $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$.

   (b) $x - y = 1$.

   (c) $\arcsin \frac{\sqrt{58}}{58} \doteq 7.5^0$.

2. *Točka T ima koordinate $T(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.*

3. *Iskana ravnina ima enačbo $-4x + 5y - 2z = 3$, premica p pa z njo oklepa kot* $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{15}\right) \doteq 46.9^o$.

4. *Pravokotna projekcija dane premice ima enačbo $\overrightarrow{r} = (-2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) + \lambda(46, 5, -13)$, njuno presečišče pa je točka s koordinatami $(-2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.*

5. *Ravnina Π ima enačbo: $x+4y-3z = 16$, točka S pa se čez njo prezrcali v točko $S''(3, 6, -5)$.*

6. *Iskana premica ima enačbo: $\overrightarrow{r} = (3, -1, -1) + \lambda(-1, 0, 1)$.*

7. *Podani premici se sekata.*

8. *Enačba iskane premice v vektorski obliki je: $\overrightarrow{r} = (1, 2, -1)+\lambda(42, 15, -11)$.*

9. *Iskana točka ima koordinate $(3, 4, -2)$.*

10. *Razdalja točke T do premice p je $\frac{\sqrt{6}}{3}$, točki na premici p, ki sta od dane točke T oddaljeni za enoto pa sta: $T_1(1, 1, 0)$ in $T_2(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.*

11. *Vektorska enačba iskane premice je $\overrightarrow{r} = (2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) + \lambda(-2, 3, 7)$.*

12. *Točka T ima koordinate $T(-3, -1, 6)$, iskana razdalja pa je $d(T, q) = 5\sqrt{2}$.*

13. *Enačba ravnine Σ je $2x + 5y - 4z = 4$, premica q pa je od nje oddaljena za $\sqrt{5}$.*

14. *Iskana ravnina je $-2x + 7y - 4z = 6$, razdalja premice p do te ravnine pa je $\frac{4\sqrt{69}}{23}$.*

15. *Ravnina ima enačbo: $2x-y+z = 5$, pravokotna projekcija premica p na to ravnino pa je premica¿ $\overrightarrow{r} = (2, -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}) + \lambda(-2, 7, 33)$. Projekcija in premica se sekata v točki $(2, -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$.*

3 Linearni prostori

1. Dana je množica $\mathcal{M} = \{(a, b, 2b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ in operaciji

$$\begin{aligned}(a, b, 2b, a) + (c, d, 2d, c) &= (a + c, b + d, 2b + 2d, a + c),\\ \lambda(a, b, 2b, a) &= (\lambda a, \lambda b, 2\lambda b, \lambda a), \quad \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

   Prepričaj se, da je množica $\mathcal{M}$ s tema dvema operacijama realen vektorski prostor.

2. Določi parameter a tako, da bo vektor $(-1, a + 2, -2, a^2 + a + 1)$ pripadal podprostoru v $\mathbb{R}^4$, razpetemu na vektorje $(1, 0, 2, 4)$, $(3, 1, 1, 2)$, in $(5, 1, 5, 3)$.

3. V linearnem prostoru $\mathbb{R}^4$ so dani vektorji: $v = (3, 9, -4, -2)$, $u_1 = (1, -2, 0, 3)$, $u_2 = (2, 3, 0, -1)$ in $u_3 = (2, -1, 2, 1)$.

   (a) Ugotovi, ali leži vektor v v linearni ogrinjači $\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3)$.

   (b) Ali je množica $\{u_1, u_2, u_3\}$ linearno neodvisna? Je ta množica baza prostora $\mathbb{R}^4$?

4. Naj bodo a, b, c in d linearno neodvisni vektorji v realnem linearnem prostoru $\mathcal{V}$. Kaj lahko poveš o linearni (ne)odvisnosti vektorjev:

   (a) $a_1 = a + 2c + d$, $b_1 = 2a - b + c$, $c_1 = a + c + d$;

   (b) $a_2 = a + 2c + d$, $b_2 = 2a - b + c$, $c_2 = -a + b + c + d$.

5. Katere od naslednjih podmnožic prostora $\mathbb{R}^5$ so linearni podprostori v $\mathbb{R}^5$?

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 \in \mathbb{Z}\},\\ \mathcal{S}_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_2 = 0\},\\ \mathcal{S}_3 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 3x_1 - 2x_2 = 0\},\\ \mathcal{S}_4 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 = 1\},\\ \mathcal{S}_5 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_3 = x_5 \quad \text{in} \quad x_2 = x_4\}.\end{aligned}$$

6. V prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ polinomov največ tretje stopnje z realnimi koeficienti sta podani naslednji množici:

$$\begin{aligned}S_1 &= \{t^3, t^3 - t^2, t^3 + t^2, t^3 - 1\},\\ S_2 &= \{t^2 - 1, t + 1, t^3 - 1\}.\end{aligned}$$

   Če je množica linearno neodvisna, ji dodaj tak polinom, da postane linearno odvisna. Če pa je množica linearno odvisna, ji odvzemi tak polinom, da postane linearno neodvisna.

7. Naj bo $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ linearen prostor polinomov največ druge stopnje z realnimi koeficienti. Katere od naslednjih množic polinomov iz tega prostora so linearno neodvisne? Če je množica linearno odvisna, izrazi en njen element kot linearno kombinacijo ostalih!

   (a) $\{1, t, t^2 - 1\}$,
   (b) $\{t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$,
   (c) $\{2t^2 + t, t^2 + 3, t\}$,
   (d) $\{2t^2 + t + 1, 3t^2 + t - 5, t + 13\}$.

8. V $\mathbb{R}^4$ imamo podprostora:

$$\begin{aligned} S &= \mathcal{L}\{(1,1,1,1),(2,3,1,0),(1,-1,1,-1)\}, \\ T &= \mathcal{L}\{(1,-1,-1,1),(2,-2,0,0),(3,-1,1,1)\}. \end{aligned}$$

   Poišči baze prostorov S, T, $S \cap T$ in $S + T$! Kolikšna je dimenzija teh prostorov?

9. Naj bosta U in V podmnožici prostora $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U &= (a,b,c,d) \mid b + c + d = 0\}, \\ V &= \{(a,b,c,d) \mid a + b = 0 \quad \text{in} \quad c = 2d\}. \end{aligned}$$

   Pokaži, da sta U in V linearna podprostora v $\mathbb{R}^4$ ter poišči baze prostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$.

10. Dopolni množico $M = \{(1,2,1,2,0),(2,-1,-1,2,0)\}$ do baze prostora $\mathbb{R}^5$ ter poišči kakšno bazo komplementarnega prostora $\mathbb{R}^5 \setminus \mathcal{L}\{M\}$.

11. V prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ polinomov največ tretje stopnje z realnimi koeficienti imamo množico:

$$\mathcal{U} = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = p(2) = 0\}.$$

   Dokaži, da je $\mathcal{U}$ linearen podprostor prostora $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, ter poišči bazo njemu komplementarnega prostora $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{U}$.

12. V prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ polinomov največ tretje stopnje z realnimi koeficienti imamo množico:

$$\mathcal{U} = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p'(0) = 0\}.$$

   Dokaži, da je $\mathcal{U}$ linearen podprostor prostora $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, ter poišči bazo njemu komplementarnega prostora $\mathcal{V} = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{U}$.

Rešitve

1. *Preverimo, da dani operaciji izpolnjujta vseh 8 aksiomov v definiciji linearnega (ali vektorskega) prostora.*

2. $a = -2$.

3. (a) $v = u_1 + 3u_2 - 2u_3$.

   (b) *Množica* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *je linearno neodvisna, vendar ne napenja prostora* $\mathbb{R}^4$*, zato tudi ni baza tega prostora.*

4. *Vektorji pod (a) so linearno neodvisni, pod (b) pa linearno odvisni.*

5. *Linearni podprostori v* $\mathbb{R}^5$ *so množice* $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ *in* $\mathcal{S}_5$*, množici* $\mathcal{S}_1$ *in* $\mathcal{S}_4$ *pa nista.*

6. *Množica* S_1 *je linearno odvisna. Da postane linearno neodvisna ji moramo odvzeti enega od prvih treh polinomov. Množica* S_2 *je linearno neodvisna. Linearno odvisna postane, če ji dodamo katerikoli polinom, ki je linearna kombinacija podanih.*

7. *Množice polinomov iz točk (a), (b) in (c) so linearno neodvisne, množica v točki (d) pa je linearno odvisna. Izrazimo lahko npr.* $2t^2 + t + 1 = \frac{2}{3}(3t^2 + t - 5) + \frac{1}{3}(t + 13)$.

8.
$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_S &= \{(1,1,1,1), (2,3,1,0), (1,-1,1,-1)\},\ \dim(S) = 3,\\
\mathcal{B}_T &= \{(1,-1,-1,1), (2,-2,0,0), (3,-1,1,1)\},\ \dim(T) = 3,\\
\mathcal{B}_{S\cap T} &= \{(2,0,2,0), (1,-1,1,-1)\},\ \dim(S\cap T) = 2,\\
\mathcal{B}_{S+T} &= \{(1,1,1,1), (2,3,1,0), (1,-1,1,-1), (1,-1,-1,1)\},\ \dim(T) = 4.
\end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_U &= \{(1,0,0,0), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)\},\\
\mathcal{B}_V &= \{(1,-1,0,0), (0,0,2,1)\},\\
\mathcal{B}_{U\cap V} &= \{(3,-3,2,1)\},\\
\mathcal{B}_{U+V} &= \{(1,0,0,0), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1), (1,-1,0,0)\}.
\end{aligned}$$

10. *Bazo* $\mathbb{R}^5$ *dobimo npr., če* M *dodamo elemente* $(1,0,0,0,0)$, $(0,0,1,0,0)$ *in* $(0,0,0,0,1)$. *Ti so tudi ena od baz komplementarnega prostora,*

11. *Da je $\mathcal{U}$ linearen podprostor prostora $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ pokažemo, ko preverimo, da je za poljubne $p, q \in \mathcal{U}$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ linearna kombinacija $\lambda p + \mu q \in \mathcal{U}$. Ena od baz komplementarnega podprostora $\mathcal{V}$ je $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{x^3, x^2\}$.*

12. *Da je $\mathcal{U}$ linearen podprostor prostora $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ pokažemo, ko preverimo, da je za poljubne $p, q \in \mathcal{U}$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ linearna kombinacija $\lambda p + \mu q \in \mathcal{U}$. Baza komplementarnega podprostora $\mathcal{V}$ je $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{x\}$.*

4 Evklidski prostori

1. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ definirajmo (nov) skalarni produkt s predpisom:
$$\langle (a,b,c),(x,y,z)\rangle = a(x-z) + 2by + c(2z-x).$$
Preveri, da predpis res ustreza vsem lastnostim skalarnega produkta. V tem novem skalarnem produktu ortonormiraj standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$.

2. V prostoru polinomov $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ imamo skalaren produkt
$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$
Poišči ortonormirano bazo podprostora
$$\mathcal{U} = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p'(-1) = p'(1)\}$$
glede na ta skalaren produkt.

3. V prostoru $\mathbb{R}^4$ imamo vektorje $a_1 = (1,0,1,0)$, $a_2 = (0,-1,1,0)$, in $a_3 = (-1,0,0,1)$.
   (a) Ortonormiraj množico $\{a_1,a_2,a_3\}$ glede na običajni skalarni produkt v $\mathbb{R}^4$.
   (b) Označimo z $\mathcal{A}$ podprostor v $\mathbb{R}^4$, napet na vektorje a_1, a_2 in a_3. Izračunaj razdaljo vektorja $b = (1,0,0,0)$ do prostora $\mathcal{A}$.

4. Naj bo
$$W = \{(x,y,z,w) \mid x+z=0 \quad \text{in} \quad 2x+w=y\}.$$
Pokaži, da je W linearen podprostor prostora $\mathbb{R}^4$ in poišči tisti element $w \in W$, ki je najmanj oddaljen od elementa $v = (-1,2,6,0)$. Kolikšna je ta razdalja?

5. V prostoru polinomov $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ imamo predpis
$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2\rangle = a_0b_0 + a_1b_2 + 2a_1b_1 + a_2b_1 + 2a_2b_2.$$
   (a) Pokaži, da ta predpis predstavlja skalarni produkt na $P_2(\mathbb{R})$.
   (b) Poišči tisti polinom v podprostoru $\mathcal{L}(x^2, x+1)$, ki je najbližje polinomu x^2+x+2.

6. Naj bo prostor $\mathbb{R}^4$ opremljen z običajnim skalarnim produktom. Vsakemu od naslednjih prostorov poišči kakšno ortonormirano bazo:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= (1,2,3,4)^\perp, \\ \mathcal{V}_2 &= \mathcal{V}_1^\perp, \\ \mathcal{V}_3 &= \mathcal{V}_2^\perp, \\ \mathcal{V}_4 &= (\mathcal{L}\{(1,2,3,4)\})^\perp. \end{aligned}$$

Rešitve

1. *V novem skalarnem produktu ortonormirano standardno bazo sestavljajo vektorji:* $(1,0,0)$, $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ *in* $(1,0,1)$.

2. *Eno od baz prostora* $\mathcal{U}$ *sestavljajo polinomi* $\{1, x, x^3\}$. *Če to množico ortonormiramo glede na podan skalarni produkt dobimo bazo*

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{5\sqrt{14}}{4}x^3 - \frac{3\sqrt{14}}{4}x\right\}.$$

3. (a) *Ortonormirana množica je*

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0), \frac{\sqrt{6}}{3}\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, 0\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)\right\}.$$

   (b) *Razdalja* b *do prostora* $\mathcal{A}$ *je enaka* $d(b, \mathcal{A}) = \|b - proj_{\mathcal{A}} b\| = \frac{1}{2}$.

4. W *je linearen podprostor prostora* $\mathbb{R}^4$ *z bazo*

$$\mathcal{B}_W = \{(1,0,-1,-2), (0,1,0,1)\}.$$

Za iskanje najbližjega elementa potrebujemo ortonormirano bazo:

$$\mathcal{B}_W^o = \{\frac{\sqrt{6}}{6}(1,0,-1,-2), \frac{\sqrt{3}}{6}(1,3,-1,1)\}.$$

Potem je iskani $w \in W$, *ki je najmanj oddaljen od* v, *enak* $w = proj_W v = \frac{1}{12}(-15,-3,15,27)$, *razdalja pa je* $\frac{\sqrt{131}}{2}$.

5. (b) $\frac{4}{5}x^2 + \frac{7}{5}x + \frac{7}{5}$.

6. *Ortonormirana baza prostora* $\mathcal{V}_1$ *je npr.*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{V}_1} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{70}}(-3,-6,5,0), \frac{1}{\sqrt{105}}(-2,-4,-6,7)\right\},$$

za ostale prostore pa velja: $\mathcal{V}_2 = \mathcal{L}\{(1,2,3,4)\}$ *in* $\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_1$.

5 Linearne preslikave

1. Podana je preslikava: $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$A(x, y, z, w) = (x - y, y + z, z, x + w).$$

Pokaži, da je preslikava A linearna, nato pa poišči kakšno bazo jedra in zaloge vrednosti te preslikave ter ugotovi, ali je injektivna/surjektivna/ bijektivna.

2. Podana je preslikava: $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$A\vec{x} = (\vec{b}\,\vec{x})\,\vec{a} + (\vec{a}\,\vec{x})\,\vec{b}.$$

Pokaži, da je preslikava A linearna, nato pa poišči kakšno bazo jedra in zaloge vrednosti te preslikave ter ugotovi, ali je injektivna/surjektivna/ bijektivna.

3. Podana je preslikava: $A : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$,

$$(Ap)(x) = p(x - 1) - p(x + 2) + p(x + 1).$$

Pokaži, da je preslikava A linearna, nato pa poišči kakšno bazo jedra in zaloge vrednosti te preslikave ter ugotovi, ali je injektivna/surjektivna/ bijektivna.

4. Podana je preslikava $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$A(x, y, z) = (x + 2y, 2x + 2z, 2x + y + 2z, 3x + y - z).$$

   (a) Pokaži, da je A linearna preslikava.

   (b) Določi število b tako, da bo vektor $y = (1, 0, b, 2b) \in \mathrm{Im}(A)$ in poišči vse vektorje, ki jih preslikava A preslika v y.

   (c) Preslikavi A priredi matriko glede na standardne baze podanih prostorov.

5. Podana je preslikava $A : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$,

$$(Ap)(x) = (x^2 + 1)p''(x) - (x + 1)p'(x) + 3p(x).$$

   (a) Pokaži, da je A linearna preslikava.

   (b) Poišči inverz preslikave A, če obstaja.

   (c) Preslikavi A priredi matriko glede na standardne baze podanih prostorov.

6. Podana je preslikava $A : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$,

$$A(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a + b, b + 2c, c + 3d).$$

(a) Pokaži, da je preslikava A linearna.

(b) Poišči kakšno bazo jedra in zaloge vrednosti preslikave ter ugotovi, ali je injektivna/surjektivna/bijektivna.

(c) Preslikavi A priredi matriko glede na standardne baze podanih prostorov.

7. Linearna preslikava $L : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ je definirana s predpisoma:

$$L(t - 1) = t + 2 \quad \text{in} \quad L(t + 1) = 2t + 1.$$

(a) Izračunaj $L(5t + 1)$.

(b) Določi $L(at + b)$ za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Zapiši matriko preslikave L glede na bazo $\mathcal{B} = \{t - 1, t + 1\}$.

8. Določi parametre a, b in c tako, da bo vektor $(1, 1, 1)$ v jedru linearne preslikave C, ki ji v standardni bazi pripada matrika:

$$[C] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & 2b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Za tako določene a, b in c poišči kakšno bazo zaloge vrednosti preslikave C.

9. Preslikava $A : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom:

$$(Ap)(x) = (x^2 + 1)p''(x) - (x + 1)p'(x) + 3p(x).$$

Ugotovi, ali je preslikava A obrnljiva in poišči njen obrat (če obstaja).

10. Linearni preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sta podani s predpisoma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y, z) &= (x - y, y - z, z - x), \\ \mathcal{B}(x, y, z) &= (x - 2y, y - 2z, z - 2x). \end{aligned}$$

Naj bo $\mathcal{C} = (\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathcal{A}$.

(a) Poišči predpis za preslikavo $\mathcal{C}$ ter kakšni bazi njenega jedra in zaloge vrednosti. Ali je $\mathcal{C}$ bijektivna preslikava?

(b) Zapiši matrike preslikav $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ glede na standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$!

11. Naj bo $\mathcal{D} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ operator odvajanja (tj. $\mathcal{D}(p) = p'$).

    (a) Pokaži, da je $\mathcal{D}$ linearna preslikava.

    (b) Zapiši matriko, ki pripada $\mathcal{D}$ v bazi $\mathcal{B} = (1 + x, 1 + 2x, x + x^2)$.

    (c) Ugotovi, ali je $\mathcal{D}$ bijekcija.

12. Naj bo linearna preslikava $F : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ podana s predpisom

$$F(ax^2 + bx + c) = (a + 2b + c, 2b + 2c, a - c).$$

$\mathcal{S}$ naj bo standardna baza prostora P_2, za urejeno bazo $\mathbb{R}^3$ pa vzemimo

$$\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))\,.$$

    (a) Pokaži, da je F linearna preslikava.

    (b) Poišči matriko, ki ustreza preslikavi F v bazah $\mathcal{S}$ in $\mathcal{B}$: $[F]_{\mathcal{S},\mathcal{B}}$.

    (c) Poišči še kakšno bazo za $\mathrm{Im}(F)$ in ugotovi, ali je preslikava F bijektivna.

13. Naj bo preslikava $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ podana s predpisom

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1 + x_3).$$

    (a) Pokaži, da je preslikava L linearna.

    (b) Poišči bazi jedra in zaloge vrednosti preslikave L.

    (c) Naj bo $\mathcal{B} = ((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$. Pokaži, da je to urejena baza prostora $\mathbb{R}^4$.

    (d) Naj $\mathcal{S}$ označuje standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$. Določi matriko $[L]_{\mathcal{B}\mathcal{S}}$, ki pripada dani linearni preslikavi L v bazah $\mathcal{S}$ in $\mathcal{B}$.

14. Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bazi $\mathcal{U} = (e_1, e_2, e_3)$ pripada matrika

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko preslikave $\mathcal{A}^2$ v bazi $\mathcal{U}' = (f_1, f_2, f_3)$, kjer so

$$f_1 = e_1, \quad f_2 = e_1 + e_2, \quad f_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

Kolikšen je rang preslikave $\mathcal{A}^2$?

15. V prostoru $\mathbb{R}^2$ imamo urejeni bazi $\mathcal{B}_1 = ((1,2),(-2,1))$ in $\mathcal{B}_2 = ((1,1),(-1,1))$, v $\mathbb{R}^3$ pa bazi $\mathcal{C}_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ in $\mathcal{C}_2 = ((1,1,0),(-1,0,1),(0,-1,1))$. Preslikavi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ glede na bazi $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{C}_1$ pripada matrika

$$[f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko $[f]_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2}$, ki ustreza preslikavi f glede na bazi $\mathcal{B}_2$ in $\mathcal{C}_2$. Kolikšen je rang preslikave f?

16. Linearni preslikavi $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ glede na standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$ ustreza matrika

$$[\mathcal{L}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko $[\mathcal{L}]_{\mathcal{B}}$, ki ustreza tej preslikavi v bazi

$$\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,0),(1,1,0)).$$

Kolikšen je rang preslikave $\mathcal{L}$?

Rešitve

1. *Preslikava A je linearna,* $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ *in ena od baz zaloge vrednosti je*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(A)} = \{(1,0,0,1),(-1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\},$$

torej je A injektivna in surjektivna ter zato tudi bijektivna preslikava.

2. *Preslikava A je linearna, bazi jedra in slike preslikave A sta na primer:*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(A)} = \{\vec{a} \times \vec{b}\} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Im}(A)} = \{\vec{a}, \vec{b}\},$$

torej A ni ne injektivna, ne surjektivna in tudi ne bijektivna preslikava.

3. *Preslikava A je linearna,* $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ *in ena od baz zaloge vrednosti je*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(A)} = \{x^3 - 6x^2 - 6x - 8, x^2 - 4x - 2, x - 2, 1\},$$

torej je A injektivna in surjektivna ter zato tudi bijektivna preslikava.

4. *(b)* $b = \frac{4}{9}$, *iskani vektor pa ima koordinate* $(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{1}{9})$.
(c) Matrika preslikave A *glede na standardne baze podanih prostorov je:*

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. *(b) Inverz preslikave* A *je:*

$$A^{-1}(ax^2 + bx + c) = \frac{a}{3}x^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{3}\right)x + \frac{c}{3} + \frac{b}{6} - \frac{a}{9}.$$

(c) Matrika preslikave A *glede na standardne baze podanih prostorov je:*

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. *(b) Bazi jedra in slike preslikave* A *sta na primer:*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(A)} &= \left\{1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right\} \quad \text{in} \\ \mathcal{B}_{\mathrm{Im}(A)} &= \{(1,0,0), (1,1,0), (0,0,3)\}, \end{aligned}$$

torej A *ni injektivna, je surjektivna in ni bijektivna preslikava.*
(c) Matrika preslikave A *glede na standardne baze podanih prostorov je:*

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. *(a)* $L(5t + 1) = 8t + 7$.
(b) $L(at + b) = \left(\frac{3a+b}{2}\right)t + \frac{3a-b}{2}$.
(c) Matrika preslikave A *glede na podano bazo je:*

$$[L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

8. $a = -2$, $b = 0$ *in* $c = 2$, *ena od baz zaloge vrednosti preslikave* C *pa je*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(C)} = \{(-2, 2, 1), (0, 0, -2)\}.$$

9. *Preslikava A je injektivna in zato obrnljiva z obratom:*

$$A^{-1}(ax^2+bx+c)=\frac{a}{3}x^2+\frac{2a+3b}{6}x+\frac{3b+6c-2a}{18}.$$

10. *(a) Predpis za preslikavo $\mathcal{C}$ je: $\mathcal{C}(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$. Bazi njenega jedra in zaloge vrednosti sta npr.*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathcal{C})}=\{(1,1,1)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Im}(\mathcal{C})}=\{(0,-1,1),(-1,1,0)\}.$$

(b) Matrike preslikav glede na standardno bazo so:

$$[\mathcal{A}]=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}, \quad [\mathcal{B}]=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&-2\\-2&0&1\end{bmatrix}, \quad [\mathcal{C}]=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}.$$

11. *(b) Matrika preslikave $\mathcal{D}$ v dani bazi je:*

$$[\mathcal{D}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}2&4&0\\-1&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

(c) Preslikave $\mathcal{D}$ ni bijekcija, saj ni ne injekcija (v njenem jedru so vse konstante), ne surjekcija ($\mathrm{Im}(\mathcal{D})=\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$).

12. *(b) Matrika preslikave F v danih bazah je:*

$$[F]_{\mathcal{S}\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&0&1\\1&-2&-3\end{bmatrix}.$$

(c) Baza $\mathrm{Im}(F)$ je npr.

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(F)}=\{(1,0,1),(1,1,0)\},$$

torej F ni surjektivna in zato tudi ne bijektivna preslikava.

13. *(b) Bazi jedra in slike preslikave L sta na primer:*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(L)}=\{(1,-1,-1,1)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Im}(L)}=\{(1,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}.$$

(c) Množica $\mathcal{B}$ je baza prostora $\mathbb{R}^4$, ker jo sestavljajo štirje med seboj linearno neodvisni (preveri!) vektorji iz $\mathbb{R}^4$.
(d) Matrika preslikave L glede na dani bazi je:

$$[L]_{\mathcal{B}\mathcal{S}}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&1&2&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}.$$

14.

$$[\mathcal{A}^2]_{\mathcal{U}'} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 12 \\ -18 & -131 & -61 \\ 20 & 48 & 190 \end{bmatrix},$$

rang preslikave $\mathcal{A}^2$ *pa je enak:* $r(\mathcal{A}^2) = \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A}^2)) = 3$.

15.

$$[f]_{\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

rang preslikave f *pa je enak:* $r(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

16.

$$[\mathcal{L}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

rang preslikave $\mathcal{L}$ *pa je enak* $r(\mathcal{L}) = \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{L})) = 3$.

6 Matrike in sistemi enačb

1. Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko
$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
(tj. poišči vse 2×2 matrike A, za katere velja: $AB = BA$.)

2. Izračunaj vse kvadratne korene enotske 2×2 matrike (tj. poišči vse 2×2 matrike A, za katere je $A^2 = I$).

3. Izračunaj vse kvadratne korene matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(tj. poišči vse 2×2 matrike B, za katere je $B^2 = A$).

4. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametra α ter poišči vse njegove rešitve:
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & 2y & & & = & 6 \\ \alpha x & + & 4y & + & \alpha z & = & 2. \end{array}$$

5. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametra β ter poišči vse njegove rešitve:
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & + & u & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & - & u & = & 0 \\ 5x & + & 5y & - & 2z & - & u & = & \beta. \end{array}$$

6. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametra α in β ter poišči vse njegove rešitve:
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & \alpha \\ 6x_1 & - & 17x_2 & + & 2x_3 & + & \beta x_4 & = & 3. \end{array}$$

7. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametrov a in b ter poišči vse njegove rešitve:
$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1. \end{array}$$

8. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametra a in b ter poišči vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{ccccccccc} ax & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & + & t & = & b \\ x & - & y & + & az & + & t & = & 0. \end{array}$$

9. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametra a, b in c ter poišči vse njegove rešitve:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 3x & - & y & + & 2z & = & b \\ x & - & 5y & + & 8z & = & c. \end{array}$$

10. Podani sta matriki:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo: $B - XA = I$ (I je enotska matrika).

11. Naj bodo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$$

in I enotska matrika. Poišči matriko X, ki zadošča enačbi:

$$AXB + AXI = C.$$

12. Podani sta matriki:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo

$$X^T C = D^{-1}.$$

13. Poišči takšno matriko Y, da bo zadoščala enačbi

$$B + Y = YA - BA,$$

pri čemer sta:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Za naslednje matrike ugotovi, pri katerih vrednostih parametra t so obrnljive:

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & t \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 1 & t^2 & t^4 \\ 1 & t^4 & t^6 \end{bmatrix}.$$

15. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi parameter a tako, da bo ena izmed lastnih vrednosti matrike A enaka 2. Poišči še ostale lastne vrednosti ter lastne vektorje, ki pripadajo največji lastni vrednosti.

16. Naj bo linearna preslikava $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ podana s predpisom:

$$f(x, y, z) = (2x + 3y, -y + 4z, 3z).$$

Poišči njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

17. Določi lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje simetrične matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Določi še tako (ortogonalno) matriko P, da bo veljalo: $P^T = P^{-1}$ in $P^TAP = D$ za neko diagonalno matriko D. S pomočjo narejenega izračunaj še A^5.

18. Določi lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ali dano martiko lahko diagonaliziramo? Če jo lahko, določi tako obrnljivo matriko P, da bo matrika $P^{-1}CP$ diagonalna. Z uporabo Cayleyevega izreka izračunaj še C^3.

19. S pomočjo QR razcepa reši naslednji sistem linearnih enačb:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & & & = & 2 \\ & & & & 3z & = & 3 \\ -2x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & + & 2z & = & 0. \end{array}$$

20. Poišči linearno funkcijo $f(x) = kx + n$, ki najbolje ustreza podatkom v tabeli *(linearno fitanje)*:

x_i	0	1	2	3
y_i	6	3	4	2

21. Poišči polinom 2. stopnje $p(x) = ax^2 + bx + c$, ki najbolje ustreza podatkom v tabeli *(kvadratično fitanje)*:

x_i	-1	0	1	2
y_i	4	0	1	2

22. Poišči rešitve naslednjega sistema linearnih enačb po metodi najmanjših kvadratov:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & 5y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & z & = & -2. \end{array}$$

Rešitve

1.

$$A = \begin{bmatrix} b & a \\ -a & b-a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Vsi iskani koreni so oblike :

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad \text{ali} \quad \begin{bmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1-bc} \end{bmatrix}, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

3. Dobimo dve rešitvi:

$$B = \begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

4. *Če je $\alpha = -2$, sistem ni rešljiv, v primeru $\alpha = 2$ ima neskončno rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

za $\alpha \neq \pm 2$ pa je rešitev:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2(2+\alpha)} \begin{bmatrix} 3\alpha + 5 \\ 2 \\ -3\alpha - 1 \end{bmatrix}.$$

5. *Sistem ni rešljiv, če je $\beta \neq 1$. Pri $\beta = 1$ pa so rešitve sistema:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

6. *Sistem ni rešljiv pri parametrih $\beta = 6, \alpha \neq 2$. Pri $\beta = 6, \alpha = 2$ dobimo dvodimenzionalen prostor rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

pri $\beta \neq 6$ pa enodimenzionalen prostor rešitev:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha - 2 - \frac{\alpha - 2}{\beta - 6} \\ -\alpha - 1 \\ 0 \\ \frac{\alpha - 2}{\beta - 6} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

7. *Sistem ni rešljiv v primerih, ko je $b \neq a = 1$ ali $b \neq a = -2$. V primeru $a = b = 1$ dobimo dvodimenzionalen prostor rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

pri $a = b = -2$ enodimenzionalen prostor rešitev:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

če pa je $a \neq 1, -2$, je rešitev ena sama:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2-a-a^2} \begin{bmatrix} 1-a \\ \frac{2-b-ab}{b} \\ b-a \end{bmatrix}.$$

8. *Sistem ni rešljiv, če je $a = 1$ in $b \neq 1$. Pri $a = b = 1$ dobimo dvodimenzionalen prostor rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

pri $a \neq 1$ pa enodimenzionalen prostor rešitev:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{a-1} \begin{bmatrix} 1-b \\ 0 \\ -b \\ ab+b-1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{a+1}{a-1} \\ \frac{-a(a+1)}{a-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

9. *Sistem ni rešljiv, če velja: $b = 2a + c$. Če to ne velja, ima sistem neskončno rešitev:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2a+3b}{11} \\ 0 \\ \frac{b-3a}{11} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

10. $X = \begin{bmatrix} -8 & 10 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$

11. $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$

12. $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

13. $Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 6 & -4 & 7 & 13 \\ 4 & -4 & 4 & 12 \\ 2 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$

14. *Matrika A je obrnljiva za $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, matrika B za $t \in \mathbb{R} \setminus \{4, -2\}$, matrika C pa za $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$.*

15. *$a = 2$, lastne vrednosti so $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$, lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti 3 pa so oblike $\alpha(0, 2, 1)$ pri $\alpha \in \mathbb{R}$.*

16. *Lastne vrednosti preslikave f so $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ in $\lambda_3 = 3$, ustrezni lastni vektorji pa $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ in $v_3 = (3, 1, 1)$.*

17. *Lastne vrednosti matrike A so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ in $\lambda_3 = 6$, ustrezni lastni vektorji pa: $v_1 = (-2, 1, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ in $v_3 = (1, 2, 0)$.*

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 1556 & 3110 & 0 \\ 3100 & 6221 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{bmatrix}.$$

18. *Lastne vrednosti matrike C so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ in $\lambda_3 = 3$, ustrezni lastni vektorji pa: $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 3, 3)$ in $v_3 = (1, 3, 4)$. Matriko C lahko diagonaliziramo, ker ima 3 linearno neodvisne lastne vektorje.*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} C P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Po Caylejevem izreku je

$$C^3 = 6C^2 - 11C + 6I = \begin{bmatrix} -13 & 16 & -2 \\ -21 & -14 & 36 \\ -21 & -41 & 63 \end{bmatrix}.$$

19. *QR razcep matrike sistema je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = QR, \qquad Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

rešitev pa $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{5}{9}$ in $z = 1$.

20. *Iskana linearna funkcija je $f(x) = -\frac{11}{10}x + \frac{27}{5}$.*

21. *Iskani polinom je $p(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{3}{4}$.*

22. *Rešitev po metodi najmanjših kvadratov je $x = -\frac{23}{15}$, $y = -\frac{28}{15}$ in $z = \frac{64}{15}$.*