Domače vaje iz LINEARNE ALGEBRE - Analitična geometrija

1. Točke $O(0,0,0)$, $A(1,0,1)$, $B(1,1,2)$ in $C(1,1,1)$ določajo paralelepiped. Poišči:

(a) enačbo premice - nosilke telesne diagonale iz točke O;

(b) enačbo ravnine, na kateri leži točka A in je vzporedna z ravnino, ki jo določajo točke O, B in C;

(c) kot pod katerim telesna diagonala iz O seka ploskev, določeno s točkami O, B in C.

2. Določi takšno točko T na ravnini $x - y + 3z = 6$, da bo točka $T'(1,-1,2)$ njena pravokotna projekcija na ravnino $x + y + z = 2$.

3. Premica q gre skozi točko $T(2,3,2)$ in pod pravim kotom seka premico:

$$p: -x = \frac{y+1}{2} = z - 2.$$

Poišči enačbo ravnine, ki vsebuje premico q in točko $R(3,5,5)$. Določi še kot med premico p in dobljeno ravnino.

4. Poišči pravokotno projekcijo premice

$$\frac{x-1}{2} = y - 1 = -z$$

na ravnino, ki jo določajo točke $T_1(1,0,1)$, $T_2(1,1,3)$ in $T_3(5,1,1)$. Kje se sekata premica in njena projekcija?

5. Ravnina Π gre skozi točko $T(3,4,1)$ in je vzporedna premicama:

$$p: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-2}, \quad \text{in} \quad q: x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Poišči enačbo ravnine Π, ter ugotovi, kam se preslika točka $S(1,-2,1)$ pri zrcaljenju čez Π.

6. Poišči enačbo premice, ki gre skozi točko $A(3,-1,-1)$, seka premico $x-2 = \frac{y-5}{2} = \frac{z+3}{-2}$ in je vzporedna ravnini $x + y + z = 5$.

7. Poišči najkrajšo razdaljo med premicama $x = -2y = z$ in $x = y = z$.

8. Poišči enačbo premice, ki gre skozi točko $T(1,2,-1)$, ter seka premici $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{3}$ in $\frac{x+2}{3} = y = \frac{z+3}{-1}$.

9. Na premici, ki je določena z enačbama $2x - y = 2$, $x - y - z = 1$, določi točko, ki je enako oddaljena od točke $A(4,1,1)$ in $B(2,1,1)$.

10. Premica p je podana s presekom ravnin $x + y = 2$, $z - x = -1$. Določi razdaljo točke $T(1,0,0)$ do premice p. Na premici p poišči točko, ki je oddaljena od točke T za enoto.

11. Poišči enačbo premice, ki leži v ravnini $x-4y+2z = 7$, ter pod pravim kotom seka premico, podano s presekom ravnin $x - 2y - 4z = -3$ in $2x + y - 3z = -1$.

12. Premico p dobimo kot presečišče ravnin

$$x + 2y + 3z = 13,$$
$$3x + y + 4z = 14.$$

Na premici p določi tako točko T, da bo točka $P(0,3,1)$ njena pravokotna projekcija na premico

$$q: \frac{x}{3} = 3 - y = z - 1.$$

Kolikšna je razdalja med točko T in premico q?

13. Dani sta premici:

$$p: x+1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{3} \quad \text{in} \quad q: \frac{5-x}{3}=\frac{y-1}{2}=z+1.$$

Poišči enačbo ravnine Σ, ki vsebuje premico p in je vzporedna premici q. Kolikšna je razdalja premice q do ravnine Σ?

14. Skozi točki $A(1,0,-2)$ in $B(0,2,2)$ položi ravnino, ki je vzporedna premici p, določeni z enačbama: $x+y-z=0$, $x-2y+z=1$. Kolikšna je razdalja premice p do dobljene ravnine?

15. Poišči pravokotno projekcijo premice

$$p: \frac{x-1}{2}=\frac{-y-2}{3}=\frac{z+1}{-3}$$

na ravnino, ki koordinatne osi seka pri $x=2.5$, $y=-5$ in $z=5$. Kje se sekata premica in njena projekcija?

REŠITVE

(Objavljene so le rešitve dokončno oddanih nalog. Za pravilnost rešitev odgovarjajo demonstratorji.)

1. *(a)* $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$ *(b)* $x-y=1$ *(c)* $\arcsin\frac{\sqrt{58}}{58}\doteq 7.5^0$

2. *Točka T ima koordinate* $T(\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{4}{3})$.

3. *Iskana ravnina ima enačbo* $-4x+5y-2z=3$, *premica p pa z njo oklepa kot* $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{3}}{15}\right)\doteq 46.9^o$.

4. *Pravokotna projekcija dane premice ima enačbo* $\vec{r}=(-2,-\frac{1}{2},\frac{3}{2})+\lambda(46,5,-13)$, *njuno presečišče pa je točka s koordinatami* $(-2,-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

5. *Ravnina* Π *ima enačbo:* $x+4y-3z=16$, *točka S pa se čez njo prezrcali v točko* $S''(3,6,-5)$.

6. *Iskana premica ima enačbo:* $\vec{r}=(3,-1,-1)+\lambda(-1,0,1)$.

7. *Podani premici se sekata.*

8. *Enačba iskane premice v vektorski obliki je:* $\vec{r}=(1,2,-1)+\lambda(42,15,-11)$.

9. *Iskana točka ima koordinate* $(3,4,-2)$.

10. *Razdalja točke T do premice p je* $\frac{\sqrt{6}}{3}$, *točki na premici p, ki sta od dane točke T oddaljeni za enoto pa sta:* $T_1(1,1,0)$ *in* $T_2(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.

11. *Vektorska enačba iskane premice je* $\vec{r}=(2,-\frac{1}{2},\frac{3}{2})+\lambda(-2,3,7)$.

12. *Točka T ima koordinate* $T(-3,-1,6)$, *iskana razdalja pa je* $d(T,q)=5\sqrt{2}$.

13. *Enačba ravnine* Σ *je* $2x+5y-4z=4$, *premica q pa je od nje oddaljena za* $\sqrt{5}$.

14. *Iskana ravnina je* $-2x+7y-4z=6$, *razdalja premice p do te ravnine pa je* $\frac{4\sqrt{69}}{23}$.

15. *Ravnina ima enačbo:* $2x-y+z=5$, *pravokotna projekcija premica p na to ravnino pa je premica¿* $\vec{r}=(2,-\frac{7}{2},-\frac{5}{2})+\lambda(-2,7,33)$. *Projekcija in premica se sekata v točki* $(2,-\frac{7}{2},-\frac{5}{2})$.