PRIIMEK	IME	VPISNA ŠTEVILKA

NALOGA	TOČKE
1.	
2.	
3.	
SKUPAJ	

2. KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE
računski del, 12.1.2006

Navodilo: Vse odgovore dobro utemelji. Čas reševanja: 60 minut. Točkovanje: 30+35+35. Srečno!

1. naloga: $\mathcal{V} = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathbb{R}^4$, kjer so

$$v_1 = (1,1,0,0), \quad v_2 = (0,1,1,0) \quad \text{in} \quad v_3 = (1,0,0,0).$$

(a) Poišči kakšno ortonormirano bazo prostora $\mathcal{V}$.

(b) Kateri element prostora $\mathcal{V}$ je najbližji elementu $y = (1,-1,-2,1)$? Kolikšna je ta razdalja?

2. naloga: Pri katerih vrednostih $a \in \mathbb{R}$ ima naslednji sistem neskončno rešitev? Zapiši vse rešitve sistema.

$$\begin{aligned} x - ay &= 0, \\ x - z - u &= 0, \\ -x + ay + au &= a^2 - a, \\ a(a-1)z + (1-a)u &= a - 1. \end{aligned}$$

3. naloga: Preslikavi v ravnini $P, Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki predstavljata pravokotno projekcijo na premico skozi izhodišče v smeri vektorja $\vec{a} = (1,1)$ ter zrcaljenje prek premice skozi izhodišče s smernim vektorjem $\vec{b} = (-1,1)$, sta podani s predpisoma

$$P(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \quad \text{in} \quad Z(x,y) = (-y,-x).$$

(a) Pokaži, da sta P in Z linearni preslikavi.

(b) Ugotovi, ali sta P in Z bijekciji. Poišči njuna inverza, če obstajata.

(c) Zapiši matrike preslikav P, Z, $P+Z$, PZ in Z^2 v bazi $\mathcal{B} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

REŠITVE:

1. naloga:

(a) Ortonormirano bazo dobimo z Gramm-Schmidtovim postopkom:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1,0) \right).$$

(b) Element prostora $\mathcal{V}$, ki je najbližji y je $y_{\mathcal{V}} = (1,-1,-2,0)$ in $d(y, y_{\mathcal{V}}) = 1$.

2. naloga: Sistem ima neskončno rešitev pri $a = 0$ ali $a = 1$, sicer je rešitev ena sama. Vse rešitve so:

$$a = 0 \quad : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

$$a = 1 \quad : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \beta \in \mathbb{R},$$

$$a \neq 0, 1 \quad : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}.$$

3. naloga:

(a) Preverimo, da za poljubna $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ velja:

$$\begin{aligned} P\left(\lambda(x_1,y_1) + \mu(x_2,y_2)\right) &= \left(\frac{\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2}{2}, \frac{\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2}{2} \right) = \lambda P(x_1,y_1) + \mu P(x_2,y_2), \\ Z\left(\lambda(x_1,y_1) + \mu(x_2,y_2)\right) &= (-\lambda y_1 - \mu y_2, -\lambda x_1 - \mu x_2) = \lambda Z(x_1,y_1) + \mu Z(x_2,y_2). \end{aligned}$$

(b) Preslikava P ni bijektivna (ni surjektivna, ker je njena zaloga vrednosti enaka $\mathcal{L}(\vec{a})$, niti ni injektivna, ker je $\mathcal{N}(P) = \mathcal{L}(\vec{b})$). Preslikava Z je bijekcija in je sama sebi inverzna: $Z^{-1} = Z$.

(c)

$$[P]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [Z]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [P+Z]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [PZ]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [Z^2]_{\mathcal{B}} = I.$$