RAČUNSKI DEL IZPITA IZ LINEARNE ALGEBRE
(22.1.2007)

Navodilo: Vsako nalogo rešuj na stran, kjer je napisana, ali pa jasno označi mesto z rešitvami. Točkovanje: $20 + 25 + 25 + 30$. Čas reševanja: 90 minut. Srečno!

1. naloga: Ravnini Σ in Λ sta dani z enačbama

$$\Sigma : x + 3y - z = 2\,,$$
$$\Lambda : x + 2y - 2z = -2\,.$$

Ravnina Π pa je pravokotna na ravnini Σ ter Λ in vsebuje točko $T(3, 2, 0)$. Poišči koordinate točke Q, v kateri se te tri ravnine sekajo, tj. točko iz preseka $\Sigma \cap \Lambda \cap \Pi$.

REŠITEV*: Iz enačb ravnin* Σ *in* Λ *preberemo ustrezna normalna vektorja*

$$\vec{n}_\Sigma = (1, 3, -1) \quad \textit{in} \quad \vec{n}_\Lambda = (1, 2, -2)\,.$$

Ker je ravnina Π *pravokotna na ravnini* Σ *in* Λ*, je njen normalni vektor pravokoten na normalna vektorja teh dveh ravnin. Recimo*

$$\vec{n}_\Pi = \vec{n}_\Sigma \times \vec{n}_\Lambda = (1, 3, -1) \times (1, 2, -2) = (-4, 1, -1)\,.$$

Da dobimo enačbo ravnine Π*, izračunamo še*

$$\vec{n}_\Pi \cdot \vec{r}_T = (-4, 1, -1) \cdot (3, 2, 0) = -10$$

in enačba ravnine Π *je* $-4x + y - z = -10$ *ali, če le-to pomnožimo z* -1*,*

$$\Pi : 4x - y + z = 10\,.$$

Točka v preseku vseh treh ravnin je točka, za katero veljajo vse tri enačbe ravnin hkrati. Rešiti moramo torej sistem:

$$\begin{aligned} x + 3y \ -z &= 2\,, \\ x + 2y - 2z &= -2, \\ 4x - y \ +z &= 10\,. \end{aligned}$$

Lotimo se ga seveda z Gaussovo eliminacijo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -9 & 9 & 18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

in točka v preseku je $Q(2, 1, 3)$.

2. naloga: Točke A, B, C, D, E in F so oglišča poševne tristrane prizme. Točka P je razpolovišče stranice BC, točka S pa središče pravokotnika $BCFE$. Točko v preseku daljic AS in DP označimo s Q.

(a) Izrazi vektor $\overrightarrow{AQ}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

(b) Kolikšen delež prostornine prizme $ABCDEF$ zavzame tetraeder $ABCQ$?

Rešitev:

(a) Iz skice (ki je tu ni) lahko razberemo

$$\overrightarrow{AQ} = \lambda\overrightarrow{AS} = \frac{\lambda}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$
$$\textit{ali} \quad \overrightarrow{AQ} = \vec{c} + \mu\overrightarrow{DP} = \vec{c} + \mu(\tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{c})\,.$$

Vektor $\overrightarrow{AS}$ smo torej izrazili na dva možna načina z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$. Skalarja λ in μ sedaj določimo iz enačbe

$$\frac{\lambda}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{c} + \mu(\tfrac{1}{2}\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}) \quad \therefore$$
$$\frac{\lambda}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \frac{\mu}{2}\vec{a} + \frac{\mu}{2}\vec{b} + (1-\mu)\vec{c}\,,$$

od koder iz linearne neodvisnosti vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ sledi

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{2}\,, \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{2}\,, \quad \frac{\lambda}{2} = 1-\mu\,.$$

(Da dve od treh enačb pravita isto, nas ne preseneča. Rešujemo sistem treh enačb z dvema neznankama, ta pa mora imeti rešitev, saj se daljici AS in DP sekata.) Iz prve enačbe sledi $\mu = \lambda$ in iz tretje dobimo

$$\frac{\lambda}{2} = 1-\lambda \quad \therefore \quad \frac{3\lambda}{2} = 1 \quad \therefore \quad \lambda = \frac{2}{3}\,.$$

Vektor $\overrightarrow{AQ}$ je torej

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,.$$

Isto stvar pa lahko dobimo tudi s povsem geometrijskim premislekom. Označimo z R razpolovišče daljice EF in si oglejmo trikotnik APR. Daljici AR in DP sta diagonali paralelograma $APRD$, zato se vzajemno razpolavljata v neki točki, označimo jo s T. Daljica TP sedaj povezuje razpolovišče stranice AR z nasprotnim ogliščem P trikotnika APR. Prav tako daljica SA povezuje razpolovišče stranice PR z nasprotnim ogliščem A trikotnika APR. Daljici TP in SA sta seveda težiščnici trikotnika APR, zato se sekata v težišču Q. Torej

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,.$$

(b) Prostornini prizme $ABCDEF$ in tetraedra $ABCQ$ izrazimo z mešanim produktom:

$$V_{ABCDEF} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|\,,$$
$$V_{ABCQ} = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{AQ}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{a},\vec{b},\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right]\right| = \frac{1}{18}\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|\,.$$

Za razmerje prostornin tako dobimo

$$\frac{V_{ABCQ}}{V_{ABCDEF}} = \frac{1}{9}\,.$$

3. naloga: Pokaži, da sta podmnožici

$$\begin{aligned} &\mathcal{U} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, z + w = 0\} \\ \text{ter}\quad &\mathcal{V} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\} \end{aligned}$$

vektorska podprostora v $\mathbb{R}^4$ in določi dimenzije prostorov $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ in $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

REŠITEV: *Začnimo z* $\mathcal{U}$. *Iz enačb* $x + y = 0$ *in* $z + w = 0$ *dobimo* $y = -x$ *ter* $w = -z$ *in množico* $\mathcal{U}$ *lahko opišemo kot*

$$\mathcal{U} = \{(x, -x, z, -z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Naj bosta $u_1 = (x_1, -x_1, z_1, -z_1)$ *ter* $u_2 = (x_2, -x_2, z_2, -z_2)$ *poljubna elementa iz* $\mathcal{U}$. *Preveriti moramo, da je tedaj tudi* $u_1 + \lambda u_2 \in \mathcal{U}$ *za vsak skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u_1 + \lambda u_2 &= (x_1, -x_1, z_1, -z_1) + \lambda(x_2, -x_2, z_2, -z_2) = \\ &= (x_1 + \lambda x_2, -x_1 - \lambda x_2, z_1 + \lambda z_2, -z_1 - \lambda z_2) = \\ &= (x_1 + \lambda x_2, -(x_1 + \lambda x_2), z_1 + \lambda z_2, -(z_1 + \lambda z_2)) \end{aligned}$$

to pa je element množice $\mathcal{U}$ *in* $\mathcal{U}$ *je zato vektorski podprostor.*

Preverimo lastnost podprostora še za $\mathcal{V}$, *tokrat malo drugače. Naj bosta*

$$v_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1) \quad \text{in} \quad v_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)$$

poljubna elementa množice $\mathcal{V}$. *To pomeni, da sta* v_1 *in* v_2 *četverici realnih števil, za kateri velja*

$$x_1 + y_1 + z_1 + w_1 = 0 \quad \text{in} \quad x_2 + y_2 + z_2 + w_2 = 0\,.$$

Vemo seveda, da je

$$\begin{aligned} v_1 + \lambda v_2 &= (x_1, y_1, z_1, w_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2, w_2) = \\ &= (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2, w_1 + \lambda w_2)\,. \end{aligned}$$

Preveriti pa moramo še, da tudi za to zadnjo četverico velja enačba, ki določa $\mathcal{V}$:

$$x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2 + z_1 + \lambda z_2 + w_1 + \lambda w_2 \stackrel{?}{=} 0\,.$$

Če nekoliko preuredimo levo stran, dobimo

$$x_1 + y_1 + z_1 + w_1 + \lambda(x_2 + y_2 + z_2 + w_2) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0\,.$$

Tudi $\mathcal{V}$ *je torej vektorski podprostor.*

Da določimo dimenziji prostorov $\mathcal{U}$ *in* $\mathcal{V}$, *najprej poiščemo njuni bazi:*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{U}} &= \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}, \\ \mathcal{B}_{\mathcal{V}} &= \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}\,. \end{aligned}$$

Sledi torej $\dim \mathcal{U} = \sharp \mathcal{B}_{\mathcal{U}} = 2$ *in* $\dim \mathcal{V} = \sharp \mathcal{B}_{\mathcal{V}} = 3$. *Računanje dimenzij prostorov* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ *ter* $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ *si precej poenostavimo, če opazimo, da je* $\mathcal{U}$ *podprostor v* $\mathcal{V}$. *Res:* $u = (x, y, z, w) \in \mathcal{U}$ *pomeni* $x+y = 0$ *in* $z+w = 0$, *od koder seveda sledi* $x+y+z+w = 0$ *in zato* $u \in \mathcal{V}$. *Velja torej* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{U}$ *ter* $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$ *in zato* $\dim \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = 2$ *ter* $\dim \mathcal{U} + \mathcal{V} = 3$.

4. naloga: V standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ ustreza lin. preslikavi $\mathcal{J}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ matrika

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

(a) Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike J.

(b) Izberi lastne vektorje matrike J tako, da bodo paroma pravokotni (če že niso), nato pa ...

(c) ... poišči še ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^3$, v kateri pripada linearni preslikavi $\mathcal{J}$ diagonalna matrika.

Rešitev:

(a) Najprej določimo karakteristični polinom matrike J:

$$p_J(\lambda) = \det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 3-\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = ((3-\lambda)^2 - 1)(2-\lambda) =$$

$$= (4-\lambda)(2-\lambda)^2 .$$

Lastne vrednosti so torej $\lambda_{1,2} = 2$ ter $\lambda_3 = 4$. Ko rešimo ustrezne sisteme

$$(J - \lambda_i I)\vec{v}_i = \vec{0},$$

dobimo tri pripadajoče lastne vektorje

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

(b) Zgornji lastni vektorji so že paroma pravokotni, tj. vsi trije skalarni produkti $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$ ter $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$ so enaki 0. (Ker smo pri lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = 2$ dobili dva linearno neodvisna lastna vektorja, bi ju seveda lahko izbrali tudi tako, da ne bi bila pravokotna. To pa lahko seveda brez težav odpravimo z drugo izbiro.)

(c) Vektorji $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ter $\vec{v}_3$ že tvorijo bazo za $\mathbb{R}^3$, v kateri je $\mathcal{J}$ diagonalna, pravokotni so tudi že, treba jih je le še normirati, tj.

$$\vec{u}_i = \frac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|} .$$

Ortonormirana baza za $\mathbb{R}^3$, v kateri pripada $\mathcal{J}$ diagonalna matrika, je potem

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} .$$