

MATEMATIKA 1 - izpiski predavanj¹

Marjeta Kramar Fijavž
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani
Katedra za matematiko in fiziko

7. maj 2025

¹Nerecenzirani izpiski vsebine brez dokazov in primerov. Lahko vsebujejo napake.

Kazalo

1	Uvod	3
1.1	Množice	3
1.1.1	Definicija in predstavitev	3
1.1.2	Operacije z množicami	3
1.1.3	Družine množic	4
1.2	Preslikave	4
1.2.1	Osnovni pojmi	4
1.2.2	Kompozitum preslikav	4
1.2.3	Lastnosti preslikav	5
1.2.4	Inverzna preslikava	5
1.3	Števila	6
1.3.1	Naravna števila	6
1.3.2	Cela števila	6
1.3.3	Racionalna števila	6
1.3.4	Realna števila	6
1.3.5	Kompleksna števila	7
2	Osnove linearne algebre	10
2.1	Vektorji	10
2.1.1	Definicija in osnovne operacije	10
2.1.2	Linearna neodvisnost in baza	11
2.1.3	Prostor $\mathbb{R}^n$	11
2.1.4	Skalarni produkt	12
2.1.5	Vektorski produkt	12
2.1.6	Mešani produkt	13
2.1.7	Vektorske enačbe	14
2.1.8	Analitična geometrija	14
2.2	Matrike	17
2.2.1	Definicije	17
2.2.2	Operacije z matrikami	17
2.2.3	Matrike kot preslikave	18
2.2.4	Sistemi linearnih enačb	18
2.2.5	Inverzna matrika in matrične enačbe	20
2.2.6	Determinante	20
2.2.7	Lastne vrednosti in lastni vektorji	21
3	Osnove matematične analize	23
3.1	Številska zaporedja	23
3.1.1	Osnovni pojmi	23
3.1.2	Operacije z zaporedji	24

3.2	Številске vrste	24
3.2.1	Definicija in primeri	24
3.2.2	Posebni primeri vrst	25
3.3	Limita funkcije	26
3.3.1	Definicije	26
3.3.2	Računska pravila za limite	26
3.4	Zveznost funkcije	27
3.4.1	Definicije	27
3.4.2	Operacije z zveznimi funkcijami	27
3.4.3	Zvezne funkcije na zaprtem intervalu	27
3.5	Odvod	28
3.5.1	Motiv	28
3.5.2	Definicija	28
3.5.3	Računska pravila za odvajanje	28
3.5.4	Ekstremi funkcije	29
3.5.5	Klasični izreki o odvedljivih funkcijah	30
3.5.6	Višji odvodi	30
3.5.7	Taylorjeva formula	31
3.6	Integral	32
3.6.1	Motiv in definicija	32
3.6.2	Lastnosti določenega integrala	32
3.6.3	Izračun določenega integrala	33
3.6.4	Nedoločeni integral	33
3.6.5	Metode za izračun integrala	34
3.6.6	Posplošeni ali izlimitirani integrali	35
3.6.7	Uporaba določenega integrala	36
3.6.8	Numerično računanje določenega integrala	37
3.6.9	Definicija logaritemske in eksponentne funkcije	37
3.7	Potenčne vrste	38
3.7.1	Taylorjeve vrste	38
3.7.2	Eksponentna funkcija v kompleksnem	39

Poglavje 1

Uvod

1.1 Množice

1.1.1 Definicija in predstavitev

Množica je matematičen objekt, ki združuje manjše objekte - *elemente*. Podamo jo bodisi z naštevanjem vseh njenih elementov (med zavitimi oklepaji), bodisi z opisom karakterističnih lastnosti elementov. Oznake:

- $a \in A \dots$ a je element množice A
- $b \notin A \dots$ b ni element množice A
- $A \subseteq B \dots$ množica A je *podmnožica* množice B (tj. vsak element A je tudi element B)
- $A = B \dots$ množici A in B sta *enaki* $\iff A \subseteq B$ in $B \subseteq A$ (tj. A in B imata iste elemente)
- $A \subset B \dots$ množica A je *prava podmnožica* množice B $\iff A \subseteq B$ in $A \neq B$
- $\emptyset = \{\} \dots$ *prazna množica* (tj. množica, ki ne vsebuje nobenega elementa)
- $\mathcal{U} \dots$ *univerzalna množica* (vsebuje vse obravnavane podmnožice)

1.1.2 Operacije z množicami

- *Unija* množic: $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ ali } x \in B\}$
- *Presek* množic: $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ in } x \in B\}$
- *Razlika* množic: $A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ in } x \notin B\}$
- *Komplement* množice: $A^c = \overline{A} := \{x \mid x \in \mathcal{U} \text{ in } x \notin A\}$
- *Kartezični produkt* množic: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

Nekatere lastnosti operacij:

- distributivnost preseka in unije

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- De Morganova zakona

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

1.1.3 Družine množic

Naj bo I neka neprazna *indeksna množica*, za katero velja, da je za vsak $i \in I$ podana množica A_i . Ustrezna *družina množic* je

$$\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in I\}.$$

Unija družine $\mathcal{A}$:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ za nek } i \in I\}$$

Presek družine $\mathcal{A}$:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ za vsak } i \in I\}$$

1.2 Preslikave

1.2.1 Osnovni pojmi

Naj bosta A in B neprazni množici. *Preslikava* $f: A \rightarrow B$ je predpis, ki vsakemu elementu $a \in A$ priredi natanko en element $f(a) \in B$. Množico A imenujemo *domena ali definicijsko območje* f in jo označimo z $\mathcal{D}(f)$, množico B pa *kodomena*. *Zaloga vrednosti* f je enaka

$$\mathcal{Z}(f) := f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B.$$

V primeru $A, B \subseteq \mathbb{R}$ rečemo, da je f (*realna*) *funkcija* (*realne spremenljivke*). Ponavadi je podan le predpis $f(x)$. V tem primeru imenujemo *naravno definicijsko območje* funkcije f največjo množico elementov $x \in \mathbb{R}$, za katere ima predpis $f(x)$ smisel.

Preslikavi $f: A \rightarrow B$ in $g: C \rightarrow D$ sta *enaki* natanko tedaj, ko velja: $A = C$, $B = D$ in $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in A$.

Graf preslikave $f: A \rightarrow B$ je množica točk

$$\mathcal{G}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B.$$

1.2.2 Kompozitum preslikav

Kompozitum preslikav $f: A \rightarrow B$ in $g: C \rightarrow D$, kjer je $\mathcal{Z}(f) \subseteq C$, je preslikava $g \circ f: A \rightarrow D$ s predpisom

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Lastnosti:

- $g \circ f \neq f \circ g$, tudi če oba obstajata!
- Če za preslikave $f: A \rightarrow B$, $g: C \rightarrow D$ in $h: E \rightarrow F$ velja $\mathcal{Z}(f) \subseteq C$ in $\mathcal{Z}(g) \subseteq E$, potem je $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

1.2.3 Lastnosti preslikav

- Preslikava $f: A \rightarrow B$ je *injektivna* natanko tedaj, ko za vse $x_1, x_2 \in A$ velja

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$

oz. ekvivalentno,

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

- Preslikava $f: A \rightarrow B$ je *surjektivna* natanko tedaj, ko za vsak $y \in B$ obstaja vsaj en $x \in A$, da je $y = f(x)$, oz. ekvivalentno, ko je $\mathcal{Z}(f) = B$.
- Preslikava $f: A \rightarrow B$ je *bijektivna* natanko tedaj, ko je injektivna in surjektivna hkrati.

1.2.4 Inverzna preslikava

Bijektivni preslikavi $f: A \rightarrow B$ *inverzna preslikava* je preslikava $f^{-1}: B \rightarrow A$ za katero velja

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Lastnosti:

- $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{Z}(f)$ in $\mathcal{Z}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$.
- $(f^{-1})^{-1} = f$.
- $f^{-1} \circ f = id_A: A \rightarrow A$, tj. *identična preslikava na A*: $id_A(x) = x$ za $x \in A$.
- $f \circ f^{-1} = id_B: B \rightarrow B$, tj. *identična preslikava na B*: $id_B(x) = x$ za $x \in B$.
- Če sta preslikavi $f: A \rightarrow B$ in $g: C \rightarrow D$ obe bijektivni, je tudi njun kompozitum $g \circ f: A \rightarrow D$ bijektivna preslikava in velja:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

1.3 Števila

1.3.1 Naravna števila

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\} \quad \text{in} \quad \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Definirane operacije: seštevanje in množenje.

Princip popolne ali matematične indukcije

Naj za množico $M \subseteq \mathbb{N}$ velja:

1. $1 \in M$,
2. če je $n \in M$, potem je tudi $n + 1 \in M$.

Potem je $M = \mathbb{N}$.

1.3.2 Cela števila

$$\mathbb{Z} := \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ali } -x \in \mathbb{N} \text{ ali } x = 0\}$$

Definirane operacije: seštevanje, odštevanje in množenje.

1.3.3 Racionalna števila

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Definirane operacije: seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje (razen z 0).

Lastnosti:

- Vsakemu racionalnemu številu na številski premici pripada točno določena točka.
- Med poljubnima racionalnima številoma je vedno vsaj še eno racionalno število.
- Racionalna števila ne pokrijejo vse številске premice.

1.3.4 Realna števila

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ je točka na številski premici}\} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

Števila iz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ imenujemo *iracionalna števila* (npr. $\sqrt{2}$, π , e).

Definirane operacije: seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje (razen z 0).

Urejenost

Realna števila so urejena:

- Za $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$a < b \iff b - a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{in} \quad a \leq b \iff a < b \text{ ali } a = b.$$

- Za $a, b \in \mathbb{R}$ vedno velja ena od možnosti: $a < b$, $a = b$ ali $b < a$.

Omejenost

- $M \subseteq \mathbb{R}$ je *navzgor omejena*, če obstaja tako število $\alpha \in \mathbb{R}$, da je $x \leq \alpha$ za vse $x \in M$. Število α imenujemo *zgornja meja* množice M .
- Natančno (tj. najmanjšo) zgornjo mejo množice M imenujemo *supremum* M in označimo $\alpha = \sup M$. Zanj velja:
 - (i) $\alpha \geq x$, za vse $x \in M$,
 - (ii) za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja za nek $x_\varepsilon \in M$, da velja $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$.
- $M \subseteq \mathbb{R}$ je *navzdol omejena*, če obstaja tako število $\alpha \in \mathbb{R}$, da je $x \geq \alpha$ za vse $x \in M$. Število α imenujemo *spodnja meja* množice M .
- Natančno (tj. največjo) spodnjo mejo množice M imenujemo *infimum* M in označimo: $\alpha = \inf M$. Zanj velja:
 - (i) $\alpha \leq x$, za vsak $x \in M$,
 - (ii) za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja za nek $x_\varepsilon \in M$, da velja $\alpha + \varepsilon > x_\varepsilon$.
- $M \subseteq \mathbb{R}$ je *omejena*, če je navzgor in navzdol omejena.
- Vsaka neprazna navzgor (oz. navzdol) omejena množica realnih števil ima supremum (oz. infimum).

Absolutna vrednost

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Lastnosti:

- (i) $|x| \geq 0$ in $|x| = 0 \iff x = 0$
- (ii) $|xy| = |x||y|$
- (iii) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- (iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (trikotniška neenakost)
- (v) $|x - y|$ je razdalja med točkama x in y na številski premici.

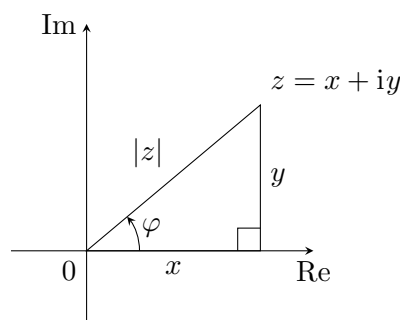
1.3.5 Kompleksna števila

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Označimo $(1, 0) \equiv 1$ (*realna enota*), $(0, 1) \equiv i$ (*imaginarna enota*), $(0, 0) \equiv 0$ (*ničla*), ter za $z \in \mathbb{C}$ pišemo

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \equiv x + iy.$$

Pri tem je $x = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ *realna* in $y = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ *imaginarna komponenta* števila $z \in \mathbb{C}$.



Za poljubni $z, w \in \mathbb{C}$ velja:

$$z = w \iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w) \quad \text{in} \quad \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w).$$

Operaciji seštevanja in množenja: za $z = a + ib$ in $w = c + id$ je

$$\begin{aligned} z + w &:= a + c + i(b + d) \\ z \cdot w &:= ac - bd + i(ad + bc) \end{aligned}$$

Konjugiranje in absolutna vrednost

Številu $z = a + ib$ konjugirano število je $\bar{z} := a - ib$.

Lastnosti:

- (i) $\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$
- (ii) $\overline{(z \cdot w)} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- (iii) $\bar{\bar{z}} = z$ in $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- (iv) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ in $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = a + ib$ je

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Lastnosti:

- (i) $|z| \geq 0$ in $|z| = 0 \iff z = 0$
- (ii) $|zw| = |z||w|$
- (iii) $|\bar{z}| = |z|$
- (iv) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ in $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- (v) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (trikotniška neenakost)
- (vi) $|z - w|$ je razdalja med točkama z in w v kompleksni ravnini.

Polarni zapis

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kjer je φ argument kompleksnega števila (tj. kot do pozitivnega poltraka realne osi).

Za $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$ in $n \in \mathbb{N}$ velja:

- $z \cdot w = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$
- $z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ (De Moivreova formula)
- vse rešitve enačbe $z^n = w$ so

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \left(\frac{\psi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\psi + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Polinomske enačbe

Vsak polinom stopnje $n \geq 1$ ima v $\mathbb{C}$ natanko n ničel (upoštevaje večkratnost). Če so koeficienti polinoma realni, nastopajo ničle v konjugirano kompleksnih parih (če je z ničla, je tudi $\bar{z}$ ničla).

Poglavje 2

Osnove linearne algebre

2.1 Vektorji

2.1.1 Definicija in osnovne operacije

Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je usmerjena daljica od točke A do točke B .

Dolžina vektorja $\overrightarrow{AB}$ je enaka dolžini daljice AB , označimo jo z $|\overrightarrow{AB}|$.

Za poznavanje vektorja potrebujemo 3 podatke: smer, dolžino in usmerjenost.

Osnovne operacije:

- Vsota vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor $\vec{a} + \vec{b}$, ki ima začetno točko v začetni točki vektorja $\vec{a}$ in končno točko v končni točki vektorja $\vec{b}$, potem ko smo začetno točko vektorja $\vec{b}$ premaknili v končno točko vektorja $\vec{a}$. Lastnosti:

(i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutativnost)

(ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (asociativnost)

(iii) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, za vse $\vec{a}$, kjer je $\vec{0}$ ničelni vektor, to je vektor dolžine 0 in brez smeri.

(iv) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, kjer je $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ nasprotni vektor vektorja $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

(v) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (trikotniška neenakost)

- Odštevanje vektorjev definiramo kot: $\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$.
- Produkt vektorja $\vec{a}$ s skalarjem (= številom) $\lambda \in \mathbb{R}$ je vektor $\lambda\vec{a}$ dolžine $|\lambda||\vec{a}|$, ki je vzporeden vektorju $\vec{a}$ in je enako usmerjen kot $\vec{a}$, če je $\lambda \geq 0$, oziroma nasprotno usmerjen, če je $\lambda < 0$. Lastnosti:

(i) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ za $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(ii) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

(iii) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

(iv) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

(v) $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

- Za $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ imenujemo izraz $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ *linearna kombinacija* vektorjev $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

2.1.2 Linearna neodvisnost in baza

Vektorji $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ so *linearno neodvisni* natanko tedaj, ko je linearna kombinacija

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$$

samo v primeru, ko so vsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

V prostoru $\mathbb{R}^3$ velja:

- neničelna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno neodvisna natanko tedaj, ko nista vzporedna, tj. ko $\vec{a} \neq \lambda \vec{b}$ za $\lambda \in \mathbb{R}$;
- neničelni vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ne ležijo na isti ravnini, tj. ko $\vec{c} \neq \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ za $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
- poljubni štirje vektorji v $\mathbb{R}^3$ so linearno odvisni.

Če so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ linearno neodvisni vektorji, lahko vsak $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ enolično zapišemo v obliki

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

V tem primeru rečemo, da je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *urejena baza* prostora $\mathbb{R}^3$ in koeficiente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ imenujemo *koordinate* vektorja $\vec{d}$ v tej bazi ter pišemo

$$\vec{d} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Računanje s koordinatami: za $\vec{a} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ in $\vec{b} \equiv (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ velja

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \\ \lambda \vec{a} &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pravokotna baza je sestavljena iz paroma pravokotnih vektorjev. *Normirana baza* je sestavljena iz enotskih vektorjev. Pravokotno in normirano bazo imenujemo *ortonormirana*.

2.1.3 Prostor $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

je prostor *urejenih n-teric*, v katerem sta definirani operaciji seštevanja in množenja s skalarjem po koordinatah:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n), \\ \lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

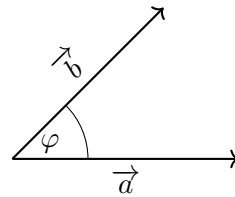
Analogno kot v $\mathbb{R}^3$ so tu definirani pojmi: linearna kombinacija, linearna neodvisnost, baza, koordinate.

2.1.4 Skalarni produkt

Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je število (= skalar), določeno z:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.



Lastnosti:

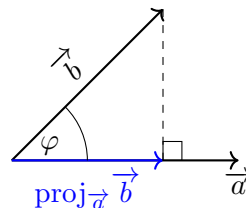
- (i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- (ii) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}), \lambda \in \mathbb{R}$
- (iii) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$
- (iv) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$
- (v) če $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \varphi = 90^\circ \iff \vec{a} \perp \vec{b}$ (pravokotnost)
- (vi) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$ in $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ natanko tedaj, ko je $\vec{a} = \vec{0}$
- (vii) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (Cauchy-Schwartzeva neenakost)

V standardni bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: če sta

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{in} \\ \vec{b} &= \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k} \equiv (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad \text{potem je} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3. \end{aligned}$$

Pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ je vektor

$$\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a}.$$

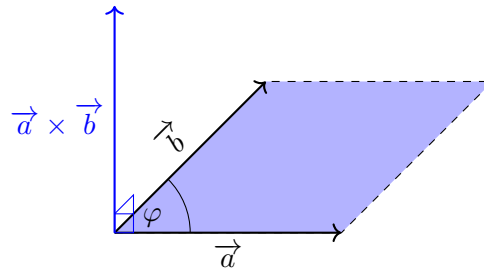


2.1.5 Vektorski produkt

Vektorski produkt vektorja $\vec{a}$ z vektorjem $\vec{b}$ je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, ki je določen z naslednjimi lastnostmi:

1. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$,
2. vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$,
3. ko vektor $\vec{a}$ po najkrajši poti zavrtimo v vektor $\vec{b}$, kaže vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ v smer premikanja desnosučnega vijaka.

Geometrijsko: dolžina $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.



Lastnosti:

- (i) če $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno odvisna
- (ii) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- (iii) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- (iv) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- (v) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$
- (vi) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

V standardni bazi: če sta

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{in} \\ \vec{b} &= \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad \text{potem je} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{i} - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\vec{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\vec{k}. \end{aligned}$$

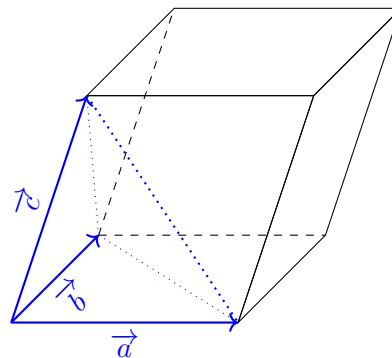
2.1.6 Mešani produkt

Mešani produkt vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je število

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Geometrijsko:

- $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$ je enak volumnu paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$;
- volumen tetraedra, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je enak $\frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$.



Lastnosti:

- (i) če so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$, je $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \iff$ vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ležijo na isti ravnini
- (ii) $[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$
- (iii) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$

V standardni bazi: če so

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} = (a_1, a_2, a_3), \\ \vec{b} &= b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k} = (b_1, b_2, b_3) \quad \text{in} \\ \vec{c} &= c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} = (c_1, c_2, c_3), \quad \text{potem je} \\ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.\end{aligned}$$

2.1.7 Vektorske enačbe

- Pri danih $\vec{a} \neq \vec{0}$ in $\beta \in \mathbb{R}$ iščemo vektorje $\vec{x}$, ki rešijo enačbo

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = \beta.$$

Rešitev je neskončno (ravnina): $\vec{x} = \frac{\beta}{|\vec{a}|^2} \vec{a} + \vec{y}$ za vse $\vec{y} \perp \vec{a}$.

- Pri danih $\vec{a} \neq \vec{0}$ in $\vec{b}$ iščemo vektorje $\vec{x}$, ki rešijo enačbo

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}.$$

Enačba je rešljiva le, če velja $\vec{a} \perp \vec{b}$. V tem primeru je rešitev neskončno (premica): $\vec{x} = \alpha \vec{a} - \frac{1}{|\vec{a}|^2} (\vec{a} \times \vec{b})$ za vse $\alpha \in \mathbb{R}$.

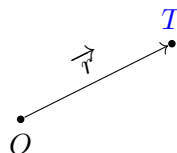
2.1.8 Analitična geometrija

V prostoru $\mathbb{R}^3$ izberemo izhodišče O in vanj postavimo pravokotni koordinatni sistem z osmi x , y in z v smeri standardnih baznih vektorjev $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$.

Točka

Točka $T(x, y, z)$ je v prostoru podana s koordinatami svojega krajevnega vektorja

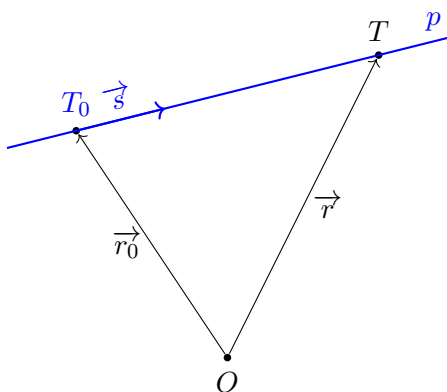
$$\vec{r} = \vec{OT} = (x, y, z).$$



Premica

Premica p je v prostoru enolično določena s točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$ na njej in smernim vektorjem $\vec{s} = (a, b, c)$, ki ji je vzporeden.

Naj bo $T(x, y, z)$ poljubna točka na premici s krajevnim vektorjem $\vec{r} = (x, y, z)$.



Vektorska enačba premice p :

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{s} = \vec{0}$$

oziroma eksplicitno:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{s}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Parametrična enačba premice p :

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a \\ y &= y_0 + \lambda b \\ z &= z_0 + \lambda c \end{aligned} \right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

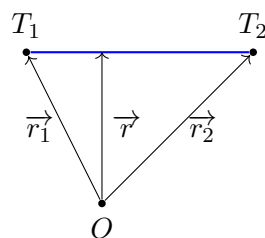
Kanonska enačba premice p :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (a, b, c \neq 0)$$

Daljica

Daljica med točkama T_1 in T_2 v prostoru je množica točk s krajevnimi vektorji

$$\vec{r} = (1 - \lambda)\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2, \quad \lambda \in [0, 1].$$

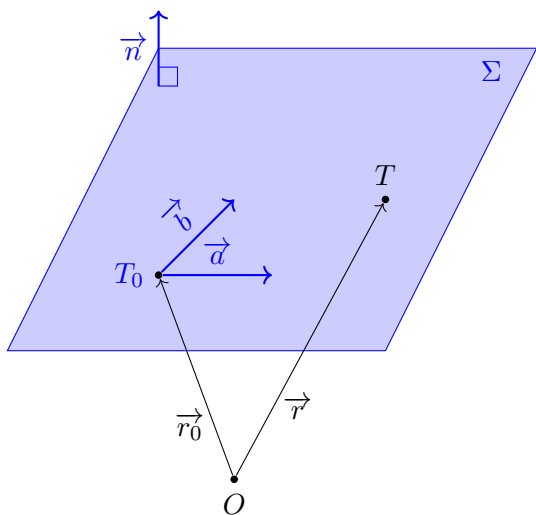


Ravnina

Ravnina Σ je v prostoru enolično določena s točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$ in

1. bodisi z dvema nekolinearnima vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki sta ravnini Σ vzporedna,
2. bodisi z *normalnim vektorjem* $\vec{n} = (a, b, c)$, ki je na ravnino Σ pravokoten.

Naj bo $T(x, y, z)$ poljubna točka na ravnini s krajevnim vektorjem $\vec{r} = (x, y, z)$.



Parametrična enačba ravnine Σ :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Vektorska enačba ravnine Σ :

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

Implicitna enačba ravnine Σ :

$$ax + by + cz = d$$

kjer je $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

2.2 Matrike

2.2.1 Definicije

Matrika dimenzije $m \times n$ je pravokotna shema (tabela) števil z m vrsticami in n stolpci:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbb{R}_{m \times n}$$

Matriki A in B sta *enaki*, če sta istih dimenzij in imata enake istoležeče elemente: $a_{ij} = b_{ij}$ za vse indekse i, j .

Z $A_{(i)}$ označimo i -to vrstico in z $A^{(j)}$ j -ti stolpec matrike A .

Posebne vrste matrik

- *Ničelna matrika* $\mathbb{0}$ je matrika, ki ima za vse elemente 0.
- *Kvadratna matrika* ima enako število vrstic in stolpcev, tj. je dimenzije $n \times n$.
- *Simetrična matrika* je kvadratna matrika za katero velja $a_{ij} = a_{ji}$ za vse i, j .
- *Diagonalna matrika* je matrika, ki ima neničelne elemente le po diagonalni.
- *Enotska matrika* je diagonalna matrika z 1 po diagonalni:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

I_n je enotska matrika dimenzije $n \times n$.

- *Zgornje trikotna matrika* ima vse elemente pod diagonalo enake 0: $a_{ij} = 0$ za $i > j$.
- *Spodnje trikotna matrika* ima vse elemente nad diagonalo enake 0: $a_{ij} = 0$ za $i < j$.

2.2.2 Operacije z matrikami

Seštevanje

Seštevamo lahko le matrike istih dimenzij. Za $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ in $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, je

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Za matrike A, B, C in $\mathbb{0}$ istih dimenzij velja:

- $A + B = B + A$,
- $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- $A + \mathbb{0} = A$,
- $A + (-A) = \mathbb{0}$ ($-A := [-a_{ij}]_{m \times n}$ je matriki A *nasprotna matrika*)

Množenje s skalarjem

Za $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ in $\lambda \in \mathbb{R}$ je

$$\lambda \cdot A = [\lambda \cdot a_{ij}]_{m \times n}.$$

Za matrike A, B in $\mathbb{O}$ istih dimenzij ter $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ velja:

- (i) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$,
- (ii) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$,
- (iii) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$,
- (iv) $1 \cdot A = A$ in $0 \cdot A = \mathbb{O}$.

Množenje matrik

Množimo lahko le matriki, za kateri se število stolpcev prve ujema s številom vrstic druge. Za $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ in $B = [b_{ij}]_{n \times r}$ je

$$A \cdot B = [c_{ij}]_{m \times r}, \quad \text{kjer je } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

(oziroma: c_{ij} je skalarni produkt vrstice $A_{(i)}$ s stolpcem $B^{(j)}$).

Za matrike A, B in C ustreznih dimenzij in $\lambda \in \mathbb{R}$ velja:

- (i) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (tudi če sta oba definirana),
- (ii) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
- (iii) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$,
- (iv) $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$,

Transponiranje

To je operacija, ki zamenja vrstice in stolpce v matriki. Za $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ je $A^\top = [a_{ji}]_{n \times m}$. Če obstaja produkt matrik AB , potem je

$$(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top.$$

2.2.3 Matrike kot preslikave

Matrika $A \in \mathbb{R}_{m \times n}$ je preslikava $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Matrične operacije ustrezajo operacijam med preslikavami. Posebej: produkt matrik ustreza kompozitumu preslikav.

2.2.4 Sistemi linearnih enačb

Sistem m linearnih enačb z n neznankami $x_1, x_2, \dots, x_n$ zapišemo kot:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (2.1)$$

Pri tem so $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *koefficienti* in $b_j \in \mathbb{R}$ *desne strani* sistema. *Homogen sistem* je sistem, kjer je desna strani enaka 0: $b_j = 0$ za vse j .

Sistem (2.1) v matrični obliki zapišemo kot $Ax = b$, kjer so

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matriko $[A|b]$ imenujemo *razširjena matrika sistema*.

Gaussova metoda eliminacije

Gaussove eliminacije ali *elementarne vrstične operacije* so:

- (i) zamenjava dveh vrstic,
- (ii) množenje vrstice z neničelnim številom,
- (iii) prištetje ene vrstice k drugi.

Matriki A in B sta *ekvivalentni*, $A \sim B$, če lahko eno dobimo iz druge s pomočjo elementarnih vrstičnih operacij.

Sistema $Ax = b$ in $\tilde{A}x = \tilde{b}$ sta *ekvivalentna* natanko tedaj, ko sta njuni razširjeni matriki ekvivalentni: $[A|b] \sim [\tilde{A}|\tilde{b}]$. Ekvivalentna sistema imata iste rešitve.

Gaussov postopek reševanja sistema:

1. Zapišemo razširjeno matriko sistema $[A|b]$.
2. Z osnovnimi vrstičnimi operacijami dobimo matriko ekvivalentnega sistema zgornje trikotne oblike:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] = [\tilde{A}|\tilde{b}].$$

3. Če je kateri izmed elementov $\bullet$ različen od 0, potem sistem ni rešljiv.
4. Za rešljiv sistem poiščemo rešitve od zadnje neničelne vrstice navzgor. Lahko tudi nadaljujemo z eliminacijami in pridobimo še več ničel (v najlepšem primeru je $\tilde{A} = I$ in dobimo $x = \tilde{b}$).
5. Število neničelnih vrstic v zgornje trikotni matriki $\tilde{A}$ po koncu Gaussovega postopka imenujemo *rang matrike* A in ga označimo z $r(A)$. Pomeni število linearno neodvisnih vrstic matrike A .

Struktura rešitev linearnega sistema

Homogen sistem $Ax = 0$ je vedno rešljiv, saj ima vsaj *trivialno rešitev* $x = 0$. Možnosti za rešitve:

- če je $r(A) = n$, potem je $x = 0$ edina rešitev sistema,
- če je $r(A) < n$, potem ima sistem neskončno mnogo rešitev oblike:

$$x = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

pri čemer je $k = n - r(A)$ in so $h_1, \dots, h_k$ med seboj linearno neodvisne rešitve sistema.

Za nehomogen sistem $Ax = b$, $b \neq 0$, velja:

- sistem je rešljiv $\iff r([A|b]) = r(A)$,
- če je $r(A) = n$, potem obstaja natanko ena rešitev sistema,
- če je $r(A) < n$, potem ima sistem neskončno mnogo rešitev oblike

$$x = x_0 + x_H,$$

kjer je x_0 neka *delna ali partikularna rešitev* nehomogenega sistema $Ax = b$ in je x_H splošna rešitev *prirejenega homogenega sistema* $Ax = 0$ oblike (2.2).

2.2.5 Inverzna matrika in matrične enačbe

Kvadratna matrika A je *obrnjiva* ali *nesingularna*, če obstaja matrika, ki jo označimo z A^{-1} , za katero je

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A.$$

A^{-1} imenujemo *inverzna* ali *obratna matrika* matriki A . Kadar obstaja, jo lahko poiščemo z Gasussovimi postopki: $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$.

Za dani matriki $A, B \in \mathbb{R}_{n \times n}$ sta matrični enačbi $AX = B$ in $YA = B$ rešljivi natanko tedaj, ko je matrika A obrnjiva. V tem primeru sta njuni rešitvi enaki $X = A^{-1}B$ in $Y = BA^{-1}$.

2.2.6 Determinante

Determinanta je preslikava, ki $n \times n$ matriki A priredi realno število, ki ga označimo z $\det A = |A|$. Definiramo jo induktivno:

$n = 1$: $\det[a] = a$.

$$n = 2: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$n \geq 2$: če je $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ in z A_{ij} označimo matriko dimenzije $(n-1) \times (n-1)$, ki jo dobimo tako, da iz A "izrežemo" i -to vrstico in j -ti stolpec, potem je

$$\det A := \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Temu rečemo *razvoj po prvi vrstici*.

Lastnosti:

- (i) Če ima A kakšno ničelno vrstico, je $\det A = 0$.

- (ii) Če je A zgornje ali spodnje trikotna, je $\det A$ enaka produktu diagonalnih elementov A .
- (iii) Če dobimo matriko B tako, da v A zamenjamo dve vrstici, je $\det B = -\det A$.
- (iv) Če dobimo matriko B tako, da k neki vrstici A prištejemo mnogokratnik neke druge vrstice, je $\det B = \det A$.
- (v) Če dobimo matriko B tako, da neko vrstico A pomnožimo s številom α , je $\det B = \alpha \cdot \det A$.
- (vi) Za $n \times n$ matriko A in $\alpha \in \mathbb{R}$ velja: $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A$.
- (vii) $\det(A^\top) = \det A$.
- (viii) Če sta matriki A in B istih dimenzij, je $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
(Pozor: $\det(A+B) \neq \det A + \det B$)
- (ix) Matrika A je obrnljiva natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$.

Odtod sledi, da lahko determinanto izračunamo tudi z *razvojem po i -ti vrstici*:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

z *razvojem po j -tem stolpcu*:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

ali s pomočjo Gasussovega postopka.

Formula za inverz obrnljive matrike:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \dots & \tilde{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{n1} & \dots & \tilde{A}_{nn} \end{bmatrix}^\top \quad \text{kjer je } \tilde{A}_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

2.2.7 Lastne vrednosti in lastni vektorji

Število $\lambda \in \mathbb{R}$ imenujemo *lastna vrednost* kvadratne matrike A , če obstaja neničelna rešitev matrične enačbe $Av = \lambda v$. Vsaka taka rešitev $v \neq 0$ se imenuje *lastni vektor* matrike A , ki pripada lastni vrednosti λ .

Vse lastne vrednosti so ničle *karakterističnega polinoma* matrike A :

$$k_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0.$$

Pri tem velja:

- $n \times n$ matrika ima največ n lastnih vrednosti.
- Vsak skalarni večkratnik lastnega vektorja A je spet lastni vektor A pri isti lastni vrednosti.
- Lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so med seboj linearno neodvisni.

Diagonalizacija

Kvadratno matriko A lahko *diagonaliziramo* natanko tedaj, ko obstajata taka obrnljiva matrika P in diagonalna matrika D , da je

$$P^{-1}AP = D.$$

Za $n \times n$ matriko A je to mogoče natanko tedaj, ko ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev. V tem primeru ima diagonalna matrika D po diagonali lastne vrednosti in so stolpci matrike P ustrezni lastni vektorji.

Posebej, za *simetrično* $n \times n$ matriko $A = A^\top$ velja:

- ima n lastnih vrednosti,
- lahko najdemo n medsebojno pravokotnih lastnih vektorjev,
- obstaja ortogonalna matrika P , za katero velja $P^{-1} = P^\top$ in $P^\top AP = D$.

Poglavje 3

Osnove matematične analize

3.1 Številska zaporedja

3.1.1 Osnovni pojmi

Številsko zaporedje je preslikava $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, kjer $a(n) \equiv a_n$ imenujemo n -ti člen zaporedja in zaporedje a zapišemo kot $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Zaporedje $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je *podzaporedje* zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, če ga dobimo tako, da v slednjem nekatere člene izpustimo, vrstni red preostalih členov pa ohranimo.

Število $\alpha \in \mathbb{R}$ je *stekališče* zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, če v vsaki okolici α leži neskončno mnogo členov zaporedja, to je

za vsak $\varepsilon > 0$ ima neenačba $|\alpha - a_n| < \varepsilon, n \in \mathbb{N}$, neskončno rešitev.

Število $\alpha \in \mathbb{R}$ je *limita* zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, če v vsaki okolici α ležijo vsi členi zaporedja od nekega indeksa n_0 dalje, to je

za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $|\alpha - a_n| < \varepsilon$.

Če ima zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ limito, ga imenujemo *konvergentno* in pišemo:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Zaporedje, ki ni konvergentno, imenujemo *divergentno*.

Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je *monotono naraščajoče* (oziroma *monotono padajoče*), ko za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq a_{n+1}$ (oziroma $a_n \geq a_{n+1}$).

Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je *navzgor omejeno* (oziroma *navzdol omejeno*), ko obstaja $M \in \mathbb{R}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq M$ (oziroma $a_n \geq M$). Zaporedje je *omejeno*, ko je navzgor in navzdol omejeno.

Pri tem velja:

- Če je α stekališče zaporedja, potem obstaja neko podzaporedje tega zaporedja, katerega limita je α .
- *Bolzano-Weierstrassov izrek*: Vsako omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.

- Limita je edino stekališče konvergentnega zaporedja.
- *Cauchyjev kriterij*: Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je konvergentno $\iff$ za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $m, n \geq n_0$ velja $|a_m - a_n| < \varepsilon$.
- Vsako monotono naraščajoče navzgor omejeno zaporedje je konvergentno.
- Vsako monotono padajoče navzdol omejeno zaporedje je konvergentno.

3.1.2 Operacije z zaporedji

Za zaporedji $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so definirane naslednje operacije:

- *vsota zaporedij*: $a + b = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
- *produkt zaporedja s skalarjem*: $\lambda a = (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
- *produkt zaporedij*: $a \cdot b = (a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
- če so vsi $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, tudi *kvocient zaporedij*: $\frac{a}{b} = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Računska pravila za limite

Naj bosta $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentni zaporedji z limitama

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta.$$

Potem veljajo naslednje trditve.

- Zaporedje $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je konvergentno z limito: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$.
- Zaporedje $(\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ konvergentno z limito: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda \alpha$.
- Zaporedje $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je konvergentno z limito: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \alpha \cdot \beta$.
- Če so vsi $b_n \neq 0$ in $\beta \neq 0$, je zaporedje $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno z limito: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\alpha}{\beta}$.
- Če za zaporedje $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ velja: $a_n \leq c_n \leq b_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$, ter $\alpha = \beta$, potem je tudi $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno z limito: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha = \beta$ ("sendvič pravilo").

Posebne limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

3.2 Številске vrste

3.2.1 Definicija in primeri

Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ številsko zaporedje. Temu zaporedju priredimo *zaporedje delnih vsot* s členi

$s_k = \sum_{n=1}^k a_n$. Limito dobljenega zaporedja imenujemo *številska vrsta*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k. \quad (3.1)$$

Vrsta (3.1) je *konvergentna* natanko tedaj, ko je konvergentno zaporedje $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Vsota vrste (3.1) je enaka limiti zaporedja $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$, če ta obstaja. V nasprotnem primeru je vrsta *divergentna*.

Nekaj lastnosti:

- Če je vrsta (3.1) konvergentna, potem je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- Če sta vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni in je $\lambda \in \mathbb{R}$, potem sta konvergentni tudi vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ ter velja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

3.2.2 Posebni primeri vrst

1. *Geometrijska vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$ je konvergentna za $|q| < 1$ in v tem primeru je njena vsota enaka $\frac{a}{1-q}$.
2. *Harmonična vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentna.
3. *Vrsta s pozitivnimi členi*, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kjer so vsi $a_n \geq 0$, je konvergentna je natanko tedaj, ko je zaporedje njenih delnih vsot omejeno.

Primerjalni kriterij: Denimo, da je velja $0 \leq a_n \leq b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(i) Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, je konvergentna tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna, je divergentna tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

4. *Alternirajoča vrsta:* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kjer je $a_n \geq 0$.

Leibnizov kriterij: Če je zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotono padajoče in je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, potem je

alternirajoča vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergentna. V tem primeru velja ocena za napako: $|s - s_n| < a_{n+1}$, kjer je s vsota vrste in s_n delna vsota vrste.

5. *Absolutno konvergentna vrsta:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutno konvergentna, če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna. Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.

Korenski test: Če je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna, če je ta limita > 1 , pa divergentna.

Kvocietni test: Če je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna, če je ta limita > 1 , pa divergentna.

3.3 Limita funkcije

3.3.1 Definicije

Naj bo funkcija f definirana v okolici točke a . Število $L \in \mathbb{R}$ je *limita funkcije f v točki a* , če za vse x blizu a velja, da je $f(x)$ blizu L , oziroma natančneje:

$$\begin{aligned} L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) &\iff \text{za vsak } \varepsilon > 0 \text{ obstaja tak } \delta > 0, \text{ da za vse } |x - a| < \delta \text{ velja } |f(x) - L| < \varepsilon. \\ &\iff \text{za vsako konvergentno zaporedje } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ z } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ je konvergentno} \\ &\quad \text{tudi zaporedje } (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ z } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L. \end{aligned}$$

Število $L^- \in \mathbb{R}$ je *leva limita* (oz. $L^+ \in \mathbb{R}$ je *desna limita*) funkcije f v točki a , če v zgornji definiciji upoštevamo le točke levo (oz. desno) od a . Pišemo:

$$L^- = \lim_{x \uparrow a} f(x) \quad \text{in} \quad L^+ = \lim_{x \downarrow a} f(x).$$

Limite v neskončnosti

Naj bo funkcija f definirana na $[a, \infty)$. Število $L \in \mathbb{R}$ je *limita funkcije f v ∞* , če vsaka okolica L vsebuje vse vrednosti $f(x)$ od nekega x naprej, oziroma natančneje:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \iff \text{za vsak } \varepsilon > 0 \text{ obstaja tak } M \geq a, \text{ da za vse } x > M \text{ velja } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Naj bo funkcija f definirana na $(-\infty, b]$. Število $L \in \mathbb{R}$ je *limita funkcije f v $-\infty$* , če vsaka okolica L vsebuje vse vrednosti $f(x)$ od nekega x nazaj, oziroma natančneje:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \iff \text{za vsak } \varepsilon > 0 \text{ obstaja tak } M \leq b, \text{ da za vse } x < M \text{ velja } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Naj bosta $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcija g je *asimptota funkcije f* , če je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Če ima f za asimptoto premico $g(x) = kx + n$, potem je

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{in} \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Obratno, če ti dve limiti obstajata, je $g(x) = kx + n$ asimptota za f .

3.3.2 Računska pravila za limite

Naj bo $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Če obstajata limiti funkcij f in g v točki a , potem obstajajo tudi naslednje limite in veljajo pravila:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x)) = \lambda \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right), \lambda \in \mathbb{R};$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right);$
- (iv) če $g(x) \neq 0$ in $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, je $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)};$
- (v) če za vse x v neki okolici a velja: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in obstajata limiti $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, potem je tudi $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

3.4 Zveznost funkcije

3.4.1 Definicije

Funkcija f je *zvezna v točki* $a \in \mathcal{D}(f)$ natanko tedaj, ko je izpoljena katerakoli od ekvivalentnih trditev:

- (i) obstaja $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ in velja: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$;
- (ii) za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $|x - a| < \delta$ velja $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$;
- (iii) za vsako zaporedje $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ki konvergira k a , velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(a);$$

- (iv) obstajata limiti $L^- = \lim_{x \uparrow a} f(x)$ in $L^+ = \lim_{x \downarrow a} f(x)$ ter velja: $L^- = L^+ = f(a)$.

Funkcija je v a *zvezna z desne oz. leve*, če v definiciji upoštevamo le leve oz. desne limite.

3.4.2 Operacije z zveznimi funkcijami

- Če sta funkciji f in g zvezni v točki a , potem so v a zvezne tudi funkcije λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), $f \pm g$, $f \cdot g$ in $\frac{f}{g}$ (če $g(a) \neq 0$).
- Če je funkcija g zvezna v točki a in funkcija f zvezna v točki $g(a)$, potem je funkcija $f \circ g$ zvezna v točki a .
- Če je funkcija $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ zvezna v vsaki točki in bijektivna, potem to velja tudi za funkcijo $f^{-1}: [c, d] \rightarrow [a, b]$.
- Vse elementarne funkcije (polinomi, racionalne funkcije, trigonometrične funkcije, eksponentna funkcija) so zvezne v vseh točkah svojega definicijskega območja. Prav tako vse funkcije, ki jih iz njih dobimo s pomočjo navedenih operacij.

3.4.3 Zvezne funkcije na zaprtem intervalu

Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna (to je zvezna na vseh točkah znotraj (a, b) , zvezna z desne v a in zvezna z leve v b). Označimo:

$$m := \inf \{f(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{in} \quad M := \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Potem veljajo naslednji izreki.

Izrek o ekstremih. Obstajata taki točki $x_m, x_M \in [a, b]$, da je $f(x_m) = m$ in $f(x_M) = M$.

Izrek o ničlah. Če je $f(a)f(b) \leq 0$, potem obstaja vsaj ena točka $c \in [a, b]$, za katero je $f(c) = 0$. (Na tem izreku temelji *metoda bisjekcije* za iskanje ničel zvezne funkcije.)

Izrek o vmesnih vrednostih. Za vsak $s \in [m, M]$ obstaja vsaj ena točka $d \in [a, b]$, za katero je $f(d) = s$.

3.5 Odvod

3.5.1 Motiv

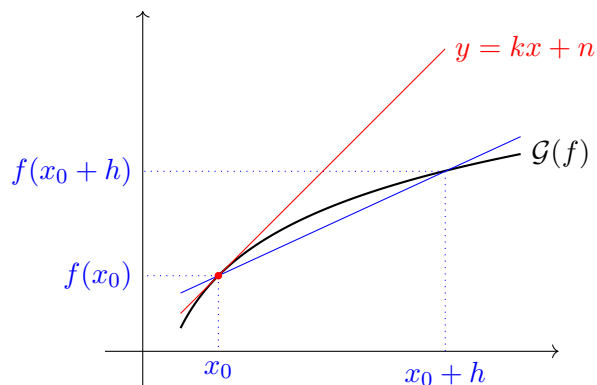
Graf funkcije je množica točk (krivulja) v ravnini, podana s predpisom:

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}(f)\}.$$

Denimo, da lahko na graf zvezne funkcije v točki x_0 položimo tangento.

Smerni koeficient tangente dobimo z limito diferenčnega kvocienta:

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



3.5.2 Definicija

Naj bo funkcija f definirana na neki okolici točke x_0 . Funkcija f je *odvedljiva* v x_0 , če obstaja limita

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.2)$$

Število $f'(x_0)$ imenujemo *odvod funkcije f v točki x_0* in je enako smernemu koeficientu tangente na graf funkcije v točki $(x_0, f(x_0))$. Če v (3.2) vzamemo le levo oz. le desno limito, dobimo *levi* oz. *desni odvod* f v x_0 :

$$f'_L(x_0) := \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{oz.} \quad f'_D(x_0) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Funkcija f je *odvedljiva na intervalu* $[a, b]$, če je odvedljiva v vsaki točki $x \in (a, b)$, v točki a odvedljiva z desne in v točki b odvedljiva z leve.

Če je funkcija f odvedljiva v točki x_0 , je v točki x_0 tudi zvezna.

3.5.3 Računska pravila za odvajanje

Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x_0 , so v točki x_0 odvedljive tudi $f + g$, fg , λf , kjer je $\lambda \in \mathbb{R}$, in $\frac{f}{g}$, za $g(x_0) \neq 0$, ter veljajo naslednje formule:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Verižno pravilo ali odvod kompozituma

Če je funkcija f odvedljiva v točki x_0 in je funkcija g odvedljiva v točki $f(x_0)$, je kompozitum $g \circ f$ odvedljiv v x_0 in velja

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Odvod inverzne funkcije

Naj bo $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ bijekcija, ki je odvedljiva v točki $x_0 \in (a, b)$. Če je $f'(x_0) \neq 0$, potem je inverzna funkcija $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ odvedljiva v točki $y_0 = f(x_0)$ in velja

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Odvodi nekaterih elementarnih funkcij

$$\begin{array}{lll} C' = 0 \ (C \in \mathbb{R}) & (\sin x)' = \cos x & (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \ (\alpha \in \mathbb{R}) & (\cos x)' = -\sin x & (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\ln x)' = \frac{1}{x} & (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \\ (e^x)' = e^x & (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} & \end{array}$$

3.5.4 Ekstremi funkcije

Naj bo $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Točka $\alpha \in (a, b)$ se imenuje

- *lokalni maksimum* funkcije f , če obstaja ε -okolica $\mathcal{O}_\varepsilon(\alpha) := (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ točke α , da velja

$$f(x) \leq f(\alpha) \text{ za vse } x \in \mathcal{O}_\varepsilon(\alpha)$$

- *lokalni minimum* funkcije f , če obstaja ε -okolica točke α , da velja

$$f(x) \geq f(\alpha) \text{ za vse } x \in \mathcal{O}_\varepsilon(\alpha).$$

- *lokalni ekstrem*, če je lokalni minimum ali lokalni maksimum.

Če ima f v α lokalni ekstrem in je f odvedljiva v α , potem je $f'(\alpha) = 0$. Točko α , za katero je $f'(\alpha) = 0$, imenujemo *stacionarna točka* funkcije f .

Po izreku o ekstremih zvezna funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na $[a, b]$ doseže ekstremne vrednosti (= *globalne ekstreme*), ki jih imenujemo

- $x_M \in [a, b]$ je *globalni maksimum* funkcije f , če $f(x) \leq f(x_M)$ za vse $x \in [a, b]$,
- $x_m \in [a, b]$ je *globalni minimum* funkcije f , če $f(x) \geq f(x_m)$ za vse $x \in [a, b]$.

Če je funkcija f zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b) , potem doseže svoje ekstreme vrednosti bodisi v stacionarnih točkah bodisi v krajših intervala.

3.5.5 Klasični izreki o odvedljivih funkcijah

Rollejev izrek. Naj bo funkcija f zvezna na $[a, b]$, odvedljiva na (a, b) in $f(a) = f(b)$. Potem obstaja vsaj ena točka $\xi \in (a, b)$, da velja $f'(\xi) = 0$.

Lagrangejev izrek. Naj bo funkcija f zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b) . Potem obstaja vsaj ena točka $\xi \in (a, b)$, da velja

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Posplošen Lagrangejev izrek. Naj bosta funkciji f in g zvezni na $[a, b]$ in odvedljivi na (a, b) . Potem obstaja vsaj ena točka $\xi \in (a, b)$, da velja

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi).$$

Posledice Lagrangejevega izreka. Naj bo f zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b) .

- (i) Če je $f'(x) = 0$ za vse $x \in (a, b)$, potem je f konstantna funkcija.
- (ii) Če je $f'(x) = g'(x)$ za vse $x \in (a, b)$, potem je $f(x) = g(x) + C$ za nek $C \in \mathbb{R}$.
- (iii) Če je $f'(x) \geq 0$ za vse $x \in (a, b)$, potem je funkcija f na (a, b) *naraščajoča*, tj. za poljubna $a < x_1 < x_2 < b$ velja $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- (iv) Če je $f'(x) \leq 0$ za vse $x \in (a, b)$, potem je funkcija f na (a, b) *padajoča*, tj. za poljubna $a < x_1 < x_2 < b$ velja $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- (v) Funkcija f ima v točki $\alpha \in (a, b)$ lokalni ekstrem natanko tedaj, ko f' v točki α menja predznak.

L'Hôpitalov izrek. Naj bosta f in g odvedljivi funkciji na (a, b) in za točko $\alpha \in (a, b)$ velja $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ ter $g(x) \neq 0$ in $g'(x) \neq 0$ za $x \neq \alpha$. Če obstaja limita

$$L = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

potem obstaja tudi $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ in je enaka L .

Izrek velja tudi za limite oblike $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$, ko je $f(\alpha) = g(\alpha) = \infty$, ko je $\alpha = \pm\infty$, ter za enostranske limite.

3.5.6 Višji odvodi

Če je funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva za vsak $x \in (a, b)$, nam predpis $x \mapsto f'(x)$ definira novo funkcijo $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, ki jo imenujemo *prvi odvod* f . Oznaka: $f' \equiv f^{(1)}$.

Induktivno: če je $f^{(n)}$ za nek $n \in \mathbb{N}$ odvedljiva za vsak $x \in (a, b)$, nam predpis $x \mapsto (f^{(n)}(x))'$ definira funkcijo $f^{(n+1)} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, ki jo imenujemo $(n+1)$ -ti odvod f .

Dogovor: $f^{(0)}(x) := f(x)$.

Formula za n -ti odvod produkta. Če sta funkciji f in g v točki x n -krat odvedljivi, potem velja formula

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x).$$

3.5.7 Taylorjeva formula

Taylorjev izrek. Naj bo f $(n+1)$ -krat zvezno odvedljiva funkcija na intervalu (a, b) in $x_0 \in (a, b)$. Potem za vse $x \in (a, b)$ velja

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{R_n(x)} \text{ za nek } \xi \in (x_0, x) \quad (3.3)$$

Formulo (3.3) imenujemo *Taylorjeva formula*, izraz $T_n(x)$ *Taylorjev polinom* funkcije f v točki x_0 stopnje n , ter $R_n(x)$ *ostanek ali napaka*.

- Druga oblika zapisa Taylorjeve formule ($x = x_0 + h$ in $\xi = x_0 + \vartheta h$ za nek $\vartheta \in (0, 1)$):

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

- Taylorjeva formula za $x_0 = 0$ se imenuje tudi *Maclaurinova formula*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ za nek } \xi \in (0, x)$$

Diferencial

Za odvedljivo funkcijo f na intervalu (a, b) velja

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)h}_{df(x_0)}.$$

Izraz $df(x_0)$ imenujemo *diferencial* funkcije f v točki x_0 pri prirastku h . Napaka aproksimacije je enaka $R_1 := \frac{1}{2}f''(\xi)h^2$ za nek $\xi \in (x_0, x_0 + h)$. Enačbi zapisani v obliki

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

rečemo tudi *linearizacija* f .

Konveksnost in konkavnost

Funkcija f je *konveksna* (oz. *konkavna*) na (a, b) , če za vsak $x_0 \in (a, b)$ njen graf leži nad (oz. pod) tangento na ta graf v točki $(x_0, f(x_0))$.

Točko, kjer funkcija f preide iz konveksnosti v konkavnost ali obratno, imenujemo *prevojna točka ali prevoj* funkcije f .

Za funkcijo f , ki je dvakrat zvezno odvedljiva na (a, b) , velja naslednje.

- Če je $f''(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a, b)$, potem je f konveksna na (a, b) .
- Če je $f''(x) \leq 0$ za vsak $x \in (a, b)$, potem je f konkavna na (a, b) .
- Če je $x_0 \in (a, b)$ prevojna točka f , potem je $f''(x_0) = 0$.
- Funkcija f ima v točki $x_0 \in (a, b)$ prevoj natanko tedaj, ko f'' v točki x_0 menja predznak.

3.6 Integral

3.6.1 Motiv in definicija

Za pozitivno funkcijo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ želimo izračunati ploščino območja, ki ga tvori graf f z abscisno osjo. Interval $[a, b]$ razdelimo na n podintervalov z delilnimi točkami

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (3.4)$$

V vsakem od teh intervalov izberemo poljubno točko $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, označimo dolžino k -tega intervala z $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ in tvorimo *Riemannovo integralsko vsoto*

$$\sigma_n := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k, \quad (3.5)$$

kar je prvi približek za iskano ploščino. Pravo vrednost (t.i. določeni integral) bomo dobili z limito σ_n , ko gre $n \rightarrow \infty$ in $\Delta x_k \rightarrow 0$.

Definicija. Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna funkcija. Število I imenujemo *določeni integral* funkcije f na $[a, b]$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja implikacija:

$$\max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k < \delta \Rightarrow |I - \sigma_n| < \varepsilon,$$

neodvisno od izbire delilnih točk x_k in $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Če tako število I obstaja, pravimo, da je funkcija f *integrabilna* na intervalu $[a, b]$ in pišemo

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Pri tem velja:

- Vrednost $\int_a^b f(x) dx$ predstavlja ploščino območja pod grafom f samo v primeru, ko je $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a, b]$.
- Če je funkcija f integrabilna na $[a, b]$, potem je omejena $[a, b]$.
- Če je funkcija f zvezna na $[a, b]$, potem je integrabilna $[a, b]$.

3.6.2 Lastnosti določenega integrala

1. Če je funkcija f integrabilna na $[a, c]$ in $[c, b]$, potem je integrabilna tudi na $[a, b]$ (in obratno) ter velja

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

2. Če sta funkciji $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilni in $\lambda \in \mathbb{R}$, sta integrabilni tudi funkciji $f + g$ in λf ter velja

$$(i) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$(ii) \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx;$$

$$(iii) \text{ če je } f(x) \leq g(x) \text{ za vse } x \in [a, b], \text{ potem je } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

$$3. \text{ Za } a < b \text{ definiramo } \int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx \text{ in } \int_a^a f(x) dx := 0.$$

4. Če je funkcija $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna, je integrabilna tudi $|f|$ in velja ocena

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

5. **Izrek o srednji vrednosti.** Če je funkcija $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, potem obstaja tak $\xi \in [a, b]$, da je

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi).$$

Vrednost $f(\xi) = \bar{f}$ imenujemo *srednja vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$* .

6. **Newton-Leibnizov izrek.** Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija in definirajmo

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \text{za } x \in [a, b].$$

Potem je funkcija $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva in $F'(x) = f(x)$ za vse $x \in [a, b]$.

3.6.3 Izračun določenega integrala

Naj bo f zvezna na $[a, b]$, Φ odvedljiva na $[a, b]$ in $\Phi'(x) = f(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Potem je

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \equiv [\Phi(x)]_a^b \equiv \Phi(x) \Big|_a^b.$$

Funkcijo Φ imenujemo *primitivna funkcija* funkcije f na intervalu $[a, b]$.

3.6.4 Nedoločeni integral

Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ nek interval in $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ je *primitivna funkcija* funkcije f , če je odvedljiva na I in velja $F'(x) = f(x)$ za vse $x \in I$. Primitivna funkcija je določena le do konstante natančno. Množico vseh primitivnih funkcij dane funkcije imenujemo *nedoločeni integral* in pišemo:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Osnovni nedoločeni integrali:

$$\begin{array}{ll} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & (\alpha \neq -1) & \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C & (x \neq 0) \\ \int e^x dx = e^x + C & & \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \\ \int \sin x dx = -\cos x + C & & \int \cos x dx = \sin x + C \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C & & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C & & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C & (x \in (-1, 1)) \end{array}$$

Lastnosti nedoločenega integrala:

$$\begin{array}{l} \text{(i)} \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \\ \text{(ii)} \quad \int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \lambda \in \mathbb{R}. \end{array}$$

3.6.5 Metode za izračun integrala

Vpeljava nove spremenljivke

- (i) **Nedoločeni integral:** Če je $F(x) = \int f(x) dx$ in je $x = x(t)$ odvedljiva funkcija, potem velja

$$F(x(t)) = \int f(x(t)) \cdot x'(t) dt.$$

- (ii) **Določeni integral:** Če je $f(x)$ zvezna na $[a, b]$, funkcija $x(t)$ zvezno odvedljiva na $[\alpha, \beta]$ in $x([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$, potem velja

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t)) \cdot x'(t) dt.$$

Integracija po delih (per partes)

- (i) **Nedoločeni integral:** Če sta u in v odvedljivi funkciji, potem velja

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx \quad \text{oz. krajše:} \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

- (ii) **Določeni integral:** Če sta funkciji $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljivi, potem velja

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx \quad \text{oz. krajše:} \quad \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

3.6.6 Posplošeni ali izlimitirani integrali

1. **Neomejena funkcija:** f je zvezna na $[a, b] \setminus \{x_0\}$ in v x_0 neomejena.

(i) Naj bo $f(x)$ zvezna na $(a, b]$ in neomejena v točki $x_0 = a$. Potem je

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

če limita obstaja.

(ii) Naj bo $f(x)$ zvezna na $[a, b)$ in neomejena v točki $x_0 = b$. Potem je

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

če limita obstaja.

(iii) Naj bo $f(x)$ zvezna na $[a, b] \setminus \{c\}$ in neomejena v točki $x_0 = c \in (a, b)$. Potem je

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

če obe limiti obstajata.

2. **Neomejeno območje:** $\int_a^\infty f(x) dx$, $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ in $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$, kjer je funkcija f zvezna.

(a) Naj bo $f(x)$ zvezna na $[a, \infty)$. Potem je

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

če limita obstaja.

(b) Naj bo $f(x)$ zvezna na $(-\infty, b)$. Potem je

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

če limita obstaja.

(c) Naj bo $f(x)$ zvezna na $\mathbb{R}$. Potem je

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx$$

za nek $c \in \mathbb{R}$, če obe limiti obstajata.

3.6.7 Uporaba določenega integrala

Ploščina

Naj bosta $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni in naj velja $f(x) \geq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Potem je ploščina lika

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

enaka

$$S(L) = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

Ločna dolžina

Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija. Potem je dolžina krivulje

$$K = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$$

enaka

$$\ell(K) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Prostornina

- Naj telo G leži med ravninama $x = a$ in $x = b$ ter naj bo abscisna os taka os telesa G , da v vsaki točki $x \in [a, b]$ poznamo ploščino $S(x)$ preseka telesa G z ravnino pravokotno na abscisno os skozi točko $(x, 0, 0)$. Če je $S(x)$ zvezna funkcija na $[a, b]$, je volumen telesa G enak

$$V(G) = \int_a^b S(x) \, dx.$$

- Naj bo f zvezna funkcija na $[a, b]$ in $f(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a, b]$. Naj bo G rotacijsko telo, ki ga popiše lik

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

pri rotaciji okrog x -osi. Potem je volumen telesa G enak

$$V(G) = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

Površina rotacijske ploskve

Naj bo f zvezna funkcija na $[a, b]$ in $f(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a, b]$. Naj bo G rotacijsko telo, ki ga popiše lik

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

pri rotaciji okrog x -osi. Potem je površina rotacijske ploskve (plašča telesa G)

$$P(G) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Masa in masno središče likov

Naj bodo $f, g, \rho: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezne funkcije. Za tanko ploščo z gostoto masne porazdelitve ρ ter oblike

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

so masa m in koordinate masnega središča $T(x^*, y^*)$ enaki

$$m = \int_a^b \rho(x) (f(x) - g(x)) dx,$$

$$x^* = \frac{1}{m} \int_a^b x \rho(x) (f(x) - g(x)) dx,$$

$$y^* = \frac{1}{2m} \int_a^b \rho(x) (f(x)^2 - g(x)^2) dx.$$

3.6.8 Numerično računanje določenega integrala

Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna pozitivna funkcija. Vrednost integrala $\int_a^b f(x) dx$ lahko približno izračunamo npr.

- (i) z delitvijo intervala $[a, b]$ na n enakih delov dolžine $h = \frac{b-a}{n}$ ter aproksimacijo ploščine pod grafom f na podintervalih s pravokotniki (uporabimo Riemannovo vsoto (3.5)) ali trapezi, kjer dobimo *trapezno formulo*:

$$S \approx \sum_{k=1}^n \frac{h}{2} (y_{k-1} + y_k), \quad y_k = f(x_k), x_k \text{ so delilne točke (3.4).}$$

Za funkcijo f , ki je dvakrat zvezno odvedljiva, je ocena za napako pri uporabi trapezne formule enaka

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

- (ii) z aproksimacijo funkcije f s Taylorjevim polinomom.

3.6.9 Definicija logaritemske in eksponentne funkcije

Logaritemska funkcija je definirana kot

$$L(x) \equiv \ln(x) \equiv \log_e(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0.$$

Je bijektivna preslikava $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ in njej inverzno preslikavo označimo z

$$E(x) \equiv \exp(x) \equiv e^x := L^{-1}(x)$$

ter imenujemo *eksponentna funkcija*. Število $e := E(1)$ imenujemo *Eulerjevo število*.

3.7 Potenčne vrste

Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (3.6)$$

kjer so $a_n \in \mathbb{R}$ dani *koeficienti* in $x_0 \in \mathbb{R}$ dana točka. Za Vsak $x \in \mathbb{R}$ je (3.6) številka vrsta.

Konvergenčni polmer potenčne vrste (3.6) definiramo kot

$$R := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \text{vrsta (3.6) konvergira za } x = t\}$$

in *konvergenčni interval* kot $K := (x_0 - R, x_0 + R)$. Potem velja

- za $x \notin [x_0 - R, x_0 + R]$ vrsta divergira;
- za $x = x_0 \pm R$ obnašanje ni določeno;
- če je $R = 0$, vrsta divergira povsod razen v $x = x_0$;
- če je $R = \infty$, vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$;
- konvergenčni polmer lahko izračunamo kot

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Naj ima potenčna vrsta $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergenčni polmer $R > 0$. Potem jo smemo členoma odvajati in integrirati ter velja

(i) za vse $x \in K$ je

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(ii) za vse $a, b \in K$ je

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

Tudi obe dobljeni potenčni vrsti imata konvergenčni polmer enak R .

3.7.1 Taylorjeve vrste

So posebni primeru potenčnih vrst, ki jih dobimo z uporabo Taylorjeve formule (3.3). Če je f neskončno-krat odvedljiva na $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ ter velja $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ za vse $x \in [a, b]$, potem je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Taylorjeva vrsta za f v okolici točke x_0 .

Nekaj pomembnejših Taylorjevih vrst:

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{eksponentna vrsta}) \\
 \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{trigonometrična vrsta - sinus}) \\
 \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{trigonometrična vrsta - kosinus}) \\
 \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1 \quad (\text{geometrijska vrsta}) \\
 \ln |1+x| &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1 \quad (\text{logaritemska vrsta})
 \end{aligned}$$

3.7.2 Eksponentna funkcija v kompleksnem

S pomočjo vrste lahko definiramo

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

za vse $z \in \mathbb{C}$. Za dobljeno funkcijo velja

- (i) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- (ii) $(e^z)^{-1} = e^{-z}, \quad z \in \mathbb{C}$
- (iii) $(e^z)^m = e^{mz}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{Z}$
- (iv) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad z \in \mathbb{C}$
- (v) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \quad z \in \mathbb{C}$

Eulerjeva formula

$$e^{x+iy} = |e^z| (\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

$e^{i\pi} + 1 = 0$