

MATEMATIKA 2 - izpiski predavanj*

Marjeta Kramar Fijavž
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani
Katedra za matematiko in fiziko

7. maj 2025

Kazalo

1	Funkcije več realnih spremenljivk	3
1.1	Metrika prostora $\mathbb{R}^n$	3
1.2	Skalarne funkcije več spremenljivk	3
1.3	Vektorske funkcije več spremenljivk	5
1.4	Uporaba parcialnih odvodov	6
2	Dvojni in trojni integrali	9
2.1	Definicija dvojnega integrala	9
2.2	Obstoj in osnovne lastnosti dvojnega integrala	9
2.3	Izračun dvojnega integrala	10
2.4	Uvedba novih spremenljivk v dvojni integral	10
2.5	Uporaba dvojnega integrala	11
2.6	Definicija trojnega integrala	12
2.7	Obstoj in osnovne lastnosti trojnega integrala	12
2.8	Izračun trojnega integrala	13
2.9	Uvedba novih spremenljivk v trojni integral	13
2.10	Uporaba trojnega integrala	14
2.11	Integrali s parametrom	14
3	Krivulje in krivuljni integral	16

*Nerecenzirani izpiski vsebine brez dokazov in primerov. Lahko vsebujejo napake.

3.1	Krivulja, pot, parametrizacija	16
3.2	Dolžina krivulje in naravni parameter	16
3.3	Osnovni trieder krivulje	17
3.4	Krivuljni integral I. vrste	18
3.5	Krivuljni integral II. vrste	18
3.6	Greenova formula	20
4	Ploskve in ploskovni integral	21
4.1	Ploskve v prostoru	21
4.2	Tangentna ravnina	21
4.3	Površina gladke elementarne ploskve	21
4.4	Ploskovni integral I. vrste	22
4.5	Ploskovni integral II. vrste	22
4.6	Diferencialni operatorji	24
4.7	Stokesov izrek	24
4.8	Gaussov izrek (o divergenci)	24
5	Diferencialne enačbe	25
5.1	Uvod	25
5.2	Navadne diferencialne enačbe 1. reda	25
5.3	Navadne diferencialne enačbe 2. reda	26

1 Funkcije več realnih spremenljivk

1.1 Metrika prostora $\mathbb{R}^n$

V prostoru n -teric $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ definiramo

- *skalarni produkt*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- (evklidsko) *normo ali dolžino*

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- (evklidsko) *metriko ali razdaljo*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Vzemimo točko $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, množico $A \subseteq \mathbb{R}^n$ in število $\varepsilon > 0$.

- ε -*okolica* točke $\mathbf{a}$ je množica

$$K_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\}.$$

- $\mathbf{a}$ je *notranja točka* množice A , če obstaja okolica $K_\varepsilon(\mathbf{a})$, ki je vsa vsebovana v A . Množico vseh notranjih točk imenujemo *notranjost* množice A .
- $\mathbf{a}$ je *zunanja točka* množice A , če obstaja okolica $K_\varepsilon(\mathbf{a})$, ki je vsa vsebovana v $\mathbb{R}^n \setminus A$.
- $\mathbf{a}$ je *robna točka* množice A , če vsaka okolica $K_\varepsilon(\mathbf{a})$ seka A in $\mathbb{R}^n \setminus A$. Množico vseh robnih točk imenujemo *rob* množice A in jo označimo z ∂A .
- A je *odprta množica*, če je vsaka njena točka notranja točka. A je *zaprta množica*, če je $\mathbb{R}^n \setminus A$ odprta množica.
- A je *omejena množica*, če obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je $A \subseteq K_\varepsilon(\mathbf{0})$; sicer je množica A *neomejena*.
- Zaporedje točk $(\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ *konvergira* k točki $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^n$, oznaka: $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_0$, če je $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0\| = 0$.

1.2 Skalarne funkcije več spremenljivk

Definicijsko območje in graf

Predpis f , ki vsaki točki $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ priredi natanko določeno realno število $f(\mathbf{x})$, imenujemo (*skalarne*) *funkcija n spremenljivk*:

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in D \mapsto f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}.$$

(Naravno) *definicijsko območje* $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ funkcije f je množica vseh točk v $\mathbb{R}^n$, za katere lahko izračunamo vrednost $f(\mathbf{x})$.

Zaloga vrednosti funkcije f je množica

$$\mathcal{Z}(f) := \{z \in \mathbb{R} \mid z = f(\mathbf{x}) \text{ za nek } \mathbf{x} \in \mathcal{D}(f)\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Graf funkcije $f: \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je množica

$$\mathcal{G}(f) = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}(f)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Limita in zveznost

Število α je *limita funkcije* $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ v točki $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D \cup \partial D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $\mathbf{x} \in D$ velja:

$$\text{če je } 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta \quad \text{potem je} \quad d(f(\mathbf{x}), \alpha) < \varepsilon.$$

Oznaka: $\alpha = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$.

Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica. Funkcija f je v točki $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$ *zvezna*, če obstaja limita $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ in če je $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Funkcija f je *zvezna na območju* $\Delta \subseteq D$, če je zvezna v vsaki točki iz Δ .

Vse elementarne funkcije kot tudi operacije med njimi so zvezne na svojih definicijskih območjih.

Parcialni odvodi

Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica. Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ je v točki $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$ *parcialno odvedljiva po spremenljivki* x_i , če obstaja limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

Limito imenujemo *parcialni odvod funkcije* f po x_i v točki $\mathbf{a}$ in jo označimo z $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \equiv f_{x_i}(\mathbf{a})$.

Posebej za $n = 2$, $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, označimo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \quad \text{in} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

(če limiti obstajata) ter ju imenujemo *parcialni odvod funkcije* f po x oz. po y v točki $(a, b) \in D$.

Če je $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah, imenujemo vektor

$$\text{grad}(f)(\mathbf{a}) \equiv \nabla f(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$$

gradient funkcije f v točki $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$.

Funkcija $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je v točki $\mathbf{a}$ *diferenciabilna*, če je parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah in so vsi njeni parcialni odvodi zvezni v točki $\mathbf{a}$.

Odводи višjih redov

Naj bo $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ parcialno odvedljiva na odprti množici D . Parcialni odvodi f definirajo funkcije $\frac{\partial f}{\partial x_i}: D \rightarrow \mathbb{R}$, ki jih lahko, če so parcialno odvedljive, ponovno parcialno odvajamo in dobimo *parcialne odvode višjih redov*, kot na primer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right), \dots$$

Če za funkcijo f na D obstajata mešana parcialna odvoda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ter sta zvezni funkciji, potem za vse $\mathbf{a} \in D$ velja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Verižno pravilo za primer $n = 2$

Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta množica in f zvezno parcialno odvedljiva na D .

1. Če sta funkciji $u, v: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljivi in velja $(u(t), v(t)) \in D$ za vsak $t \in (\alpha, \beta)$, potem je funkcija

$$h: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) := f(u(t), v(t))$$

odvedljiva in za vse $t \in (\alpha, \beta)$ velja

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)) \cdot v'(t).$$

2. Če sta funkciji $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, parcialno odvedljivi na odprti množici $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in velja $(u(t, s), v(t, s)) \in D$ za vsak $(t, s) \in \Omega$, potem je funkcija

$$h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t, s) := f(u(t, s), v(t, s))$$

parcialno odvedljiva in za vse $(t, s) \in \Omega$ velja

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t}(t, s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u(t, s), v(t, s)) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(t, s) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t, s), v(t, s)) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}(t, s) \\ \frac{\partial h}{\partial s}(t, s) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u(t, s), v(t, s)) \cdot \frac{\partial u}{\partial s}(t, s) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t, s), v(t, s)) \cdot \frac{\partial v}{\partial s}(t, s) \end{aligned}$$

1.3 Vektorske funkcije več spremenljivk

Vektorska funkcija ali vektorsko polje $\mathbf{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je določena s svojimi skalarnimi komponentami $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_m): \mathbf{x} \in D \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^m.$$

Vektorska funkcija $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_m): D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je *zvezna*, če so zvezne vse njene skalarne komponente f_i , $i = 1, \dots, m$.

Če so vse f_i parcialno odvedljive skalarne funkcije v točki $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ definiramo matriko dimenzije $m \times n$

$$\mathcal{J}(\mathbf{F})(\mathbf{a}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right]_{m \times n},$$

ki jo imenujemo *Jacobijeva matrika* funkcije $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_m)$ v točki $\mathbf{a}$.

Verižno pravilo za vektorske funkcije

Naj bosta $A \subseteq \mathbb{R}^n$ in $B \subseteq \mathbb{R}^m$ odprti množici ter $\mathbf{G}: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $\mathbf{F}: B \rightarrow \mathbb{R}^k$ vektorski funkciji za kateri velja $\mathbf{G}(A) \subseteq B$. Če so zvezno parcialno odvedljive vse skalarne komponente funkcije $\mathbf{G}$ v točki $\mathbf{a} \in A$ ter funkcije $\mathbf{F}$ v točki $\mathbf{b} = \mathbf{G}(\mathbf{a}) \in B$, potem velja

$$\mathcal{J}(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\mathbf{a}) = \mathcal{J}(\mathbf{F})(\mathbf{G}(\mathbf{a})) \cdot \mathcal{J}(\mathbf{G})(\mathbf{a}).$$

Posledice za skalarne funkcije

Naj bodo $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$ ter $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$, $\|\mathbf{s}\| = 1$. Če limita

$$(\nabla_{\mathbf{s}} f)(\mathbf{a}) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{\lambda}$$

obstaja, jo imenujemo *odvod funkcije f v točki $\mathbf{a}$ v smeri $\mathbf{s}$* .

Če je f v $\mathbf{a}$ zvezno parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah, velja

$$(\nabla_{\mathbf{s}} f)(\mathbf{a}) = \langle \text{grad}(f)(\mathbf{a}), \mathbf{s} \rangle.$$

Vektor $\text{grad}(f)(\mathbf{a})$ kaže v smeri najhitrejšega naraščanja funkcije f .

1.4 Uporaba parcialnih odvodov

Taylorjeva formula

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica, funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $(p+1)$ -krat zvezno parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah, $\mathbf{a} \in D$ in $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tak, da je $\mathbf{a} + \vartheta \mathbf{h} \in D$ za vsak $\vartheta \in [0, 1]$. *Taylorjevo formulo za f reda p v točki $\mathbf{a}$* zapišemo kot

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{k=0}^p \frac{(\langle \mathbf{h}, \nabla \rangle^k f)(\mathbf{a})}{k!} + \frac{(\langle \mathbf{h}, \nabla \rangle^{p+1} f)(\mathbf{a} + \vartheta \mathbf{h})}{(p+1)!}$$

za nek $\vartheta \in [0, 1]$, kjer je $\langle \mathbf{h}, \nabla \rangle = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

S pomočjo Taylorjeve formule reda 1 funkcijo f v okolici točke $\mathbf{a}$ *lineariziramo*:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a})$$

kjer je

$$df(\mathbf{a}) := (\langle \mathbf{h}, \nabla \rangle f)(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$$

totalni diferencial funkcije f v točki $\mathbf{a}$ pri prirastku $\mathbf{h}$.

Posebej za $n = 2, p = 1$: za funkcijo $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ki je zvezno parcialno odvedljiva po x in po y v okolici točke $(a_1, a_2) \in D$ ter dovolj majhna $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ velja

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \approx f(a_1, a_2) + df(a_1, a_2),$$

kjer je

$$df(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)h_2.$$

Lokalni ekstremi

Naj bo $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica. f ima v točki $\mathbf{a} \in D$ *lokalni maksimum* (oziroma *lokalni minimum*), če obstaja taka okolica $K_\varepsilon(\mathbf{a})$ točke $\mathbf{a}$, da za vsak $\mathbf{x} \in K_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap D$ velja

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad (\text{oziroma } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})).$$

Če je f parcialno odvedljiva po vseh svojih spremenljivkah, točko $\mathbf{a} \in D$, za katero velja

$$\text{grad}(f)(\mathbf{a}) = 0,$$

imenujemo *stacionarna točka* funkcije f . Če ima f v $\mathbf{a} \in D$ lokalni ekstrem in je v tej točki parcialno odvedljiva, potem je $\mathbf{a}$ stacionarna točka.

Za dvakrat parcialno odvedljivo funkcijo f na D definiramom matriko parcialnih odvodov drugega reda

$$\mathcal{H}(f) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{n \times n},$$

ki jo imenujemo *Hessejeva matrika funkcije f* . Če je $\mathbf{a} \in D$ stacionarna točka za f in je matrika $\mathcal{H}(f)(\mathbf{a})$ pozitivno definitna¹ (oziroma negativno definitna), potem ima f v točki $\mathbf{a}$ lokalni minimum (oziroma lokalni maksimum). Če matrika $\mathcal{H}(f)(\mathbf{a})$ ni niti pozitivno niti negativno definitna, potem f v $\mathbf{a}$ nima lokalnega ekstrema. Če je matrika $\mathcal{H}(f)(\mathbf{a})$ singularna, nam o obstoju lokalnega ekstrema funkcije f ničesar ne pove.

Posebej za $n = 2$: naj bo $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat zvezno parcialno odvedljiva. Če je $(a, b) \in D$ stacionarna točka za f in je $\det \mathcal{H}(f)(a, b) > 0$, ima funkcija f v (a, b) lokalni ekstrem in sicer:

- v primeru $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ ima lokalni minimum,
- v primeru $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ ima lokalni maksimum.

Če je $\det \mathcal{H}(f)(a, b) < 0$, funkcija f v (a, b) nima lokalnega ekstrema, v primeru $\det \mathcal{H}(f)(a, b) = 0$ pa nam Hessejeva matrika o obstoju lokalnega ekstrema funkcije f ničesar ne pove.

¹ $n \times n$ matrika A je *pozitivno definitna* natanko tedaj, ko je $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ za vse neničelne $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ oziroma ekvivalentno, ko so vse lastne vrednosti A pozitivne.

Globalni ekstremi

Naj bo $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ zaprta in omejena podmnožica ter $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcija f ima v točki $\mathbf{a} \in \Delta$ *globalni maksimum* (oziroma *globalni minimum*), če velja

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad (\text{oziroma } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})) \quad \text{za vsak } \mathbf{x} \in \Delta.$$

Če je f zvezna funkcija, potem na Δ doseže svoj globalni maksimum in svoj globalni minimum.

Če je f zvezna na Δ in parcialno odvedljiva v notranjosti Δ , potem ekstremne vrednosti doseže bodisi v stacionarnih točkah v notranjosti območja Δ bodisi v robnih točkah območja Δ .

Vezani ekstremi

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica, $f, g_1, \dots, g_m: D \rightarrow \mathbb{R}$ in

$$M = \{\mathbf{x} \in D \mid g_1(\mathbf{x}) = \dots = g_m(\mathbf{x}) = 0\} \subseteq D.$$

Vezani ekstrem f na M je ekstrem funkcije $f|_M: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Metoda Langrangeovih množiteljev. Naj bodo funkcije $f, g_1, \dots, g_m: D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah. Če ima funkcija $f|_M$ lokalni ekstrem v točki $\mathbf{a} \in D$, potem obstajajo taka števila $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, da je

$$\text{grad} \left(f + \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot g_k \right) (\mathbf{a}) = 0.$$

Dobljeno funkcijo $n + m$ spremenljivk,

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) := f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot g_k(x_1, \dots, x_n)$$

imenujemo *Lagrangeova funkcija*, števila $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ pa *Lagrangeovi množitelji*.

2 Dvojni in trojni integrali

2.1 Definicija dvojnega integrala

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ zaprto, omejeno območje z odsekoma gladkim robom in $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Območje D razdelimo z gladkimi krivuljami na n podobmočij $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ s ploščinami $S(D_k)$. V vsakem od teh podobmočij izberemo poljubno točko $(x_k, y_k) \in D_k$ in tvorimo *Riemannovo integralsko vsoto*

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) S(D_k).$$

Premer $d(D_k)$ podobmočja D_k je premer najmanjšega kroga, ki vsebuje D_k in *velikost delitve* definiramo kot $\delta_D := \max\{d(D_1), \dots, d(D_n)\}$.

Število I imenujemo *dvojni integral funkcije f po D* , če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev območja D velikosti $\delta_D < \delta$ in poljuben izbor točk $(x_k, y_k) \in D_k$ velja

$$|I - \sigma| < \varepsilon$$

(tj. $I = \lim_{\delta_D \rightarrow 0} \sigma$). Če tako število I obstaja, pravimo, da je f *integrabilna na D* in pišemo

$$I = \iint_D f \, dS = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy.$$

2.2 Obstoj in osnovne lastnosti dvojnega integrala

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ zaprto omejeno območje z odsekoma gladkim robom. Če je $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, potem je tudi integrabilna na D . Velja tudi: če je f omejena na D in nezvezna le vzdolž odsekoma gladke krivulje, potem je integrabilna na D .

Za integrabilni funkciji $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ velja naslednje.

- $\iint_D (f(x, y) + g(x, y)) \, dx \, dy = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy + \iint_D g(x, y) \, dx \, dy.$
- $\iint_D \lambda f(x, y) \, dx \, dy = \lambda \iint_D f(x, y) \, dx \, dy, \lambda \in \mathbb{R}.$
- Za omejeni območji $D_1, D_2 \subseteq D \subset \mathbb{R}^2$ z odsekoma gladkim robom in $S(D_1 \cap D_2) = 0$ je

$$\iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

- Če je $f(x, y) \leq g(x, y)$ za vsak $(x, y) \in D$, potem je

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_D g(x, y) \, dx \, dy.$$

- $\left| \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| \, dx \, dy.$

- $\iint_D 1 \, dx \, dy = S(D)$ (= ploščina območja D).

7. Če je f zvezna funkcija in D povezana množica, potem obstaja $(x_0, y_0) \in D$, da je *povprečna vrednost* f na D enaka

$$\bar{f} := f(x_0, y_0) = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy.$$

2.3 Izračun dvojnega integrala

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ zaprto omejeno območje z odsekoma gladkim robom in $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Dvojni integral po D prevedemo na dva enojna integrala na naslednji način.

1. Za $D = [a, b] \times [c, d]$ (*Fubinijev izrek*):

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \equiv \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \, dy \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \equiv \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) \, dx. \end{aligned}$$

2. Za $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ kjer sta $\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ odsekoma odvedljivi in $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ za vsak $x \in [a, b]$:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \equiv \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

3. Za $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$, kjer sta $\psi_1, \psi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ odsekoma odvedljivi in $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ za vsak $y \in [c, d]$:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy \equiv \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx.$$

4. Splošnejše območje D razdelimo na kose zgornjih oblik.

2.4 Uvedba novih spremenljivk v dvojni integral

Naj bodo:

- (i) $U \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica,
- (ii) $x, y: U \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljivi funkciji,
- (iii) $\Phi(u, v) := (x(u, v), y(u, v)): U \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektivna preslikava na $U \setminus U_0$, kjer je $S(U_0) = 0$, z neničelno *Jacobijevo determinanto*:

$$\det \mathcal{J}(\Phi)(u, v) \neq 0 \quad \text{za} \quad (u, v) \in U \setminus U_0,$$

- (iv) $\Delta \subset U$ zaprto omejeno območje, $D := \Phi(\Delta)$ in $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija.

Potem velja

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |\det \mathcal{J}(\Phi)(u, v)| \, du \, dv.$$

- Geometrijski pomen Jacobijeve determinante:

$$|\det \mathcal{J}(\Phi)(u, v)| = \lim_{\Delta \rightarrow (u, v)} \frac{S(\Phi(\Delta))}{S(\Delta)}.$$

- *Polarne koordinate:* $\Phi(r, \varphi) = (x(r, \varphi), y(r, \varphi)) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ in $\det \mathcal{J}(\Phi)(r, \varphi) = r$.

2.5 Uporaba dvojnega integrala

Ploščina

Za $D \subset \mathbb{R}^2$ je

$$S(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy.$$

Prostornina

Za $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$ je

$$V(G) = \iint_D (f(x, y) - g(x, y)) \, dx \, dy.$$

Masa, težišče, vztrajnostni moment

Naj bo D tanka nehomogena plošča z zvezno gostoto $\rho(x, y)$ v točki (x, y) . Potem so

- *masa plošče* D :

$$m(D) = \iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy,$$

- *koordinati težišča* $T(x_T, y_T)$:

$$x_T = \frac{1}{m(D)} \iint_D x \rho(x, y) \, dx \, dy, \quad y_T = \frac{1}{m(D)} \iint_D y \rho(x, y) \, dx \, dy,$$

- *koordinati geometrijskega središča* $S_0(x_0, y_0)$:

$$x_0 = \frac{1}{S(D)} \iint_D x \, dx \, dy, \quad y_0 = \frac{1}{S(D)} \iint_D y \, dx \, dy,$$

- *vztrajnostni momenti* I_x glede na x -os, I_y glede na y -os in I_0 glede na izhodišče:

$$I_x(D) = \iint_D y^2 \rho(x, y) \, dx \, dy, \quad I_y(D) = \iint_D x^2 \rho(x, y) \, dx \, dy, \quad I_0(D) = I_x(D) + I_y(D).$$

2.6 Definicija trojnega integrala

Naj bo $G \subset \mathbb{R}^3$ zaprto omejeno območje in $f: G \rightarrow \mathbb{R}$. Območje G razdelimo na disjunktne množice $G = G_1 \cup \dots \cup G_n$ s prostorninami $V(G_i)$. V vsakem od teh podobmočij izberemo poljubno točko $(x_i, y_i, z_i) \in G_i$ in tvorimo *Riemannovo integralsko vsoto*

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) V(G_i).$$

Definirajmo še *premer* $d(G_i)$ podobmočja G_i kot premer najmanjše krogle, ki vsebuje G_i in *velikost delitve* $\delta_G := \max\{d(G_1), \dots, d(G_n)\}$.

Funkcija f je *integrabilna na G* če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako delitev območja G velikosti $\delta_G < \delta$ in poljuben izbor točk $(x_i, y_i, z_i) \in G_i$ velja

$$|I - \sigma| < \varepsilon.$$

Število I imenujemo *trojni integral funkcije f po G* in pišemo:

$$I = \iiint_G f \, dV = \iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

2.7 Obstoj in osnovne lastnosti trojnega integrala

Naj bo $G \subset \mathbb{R}^3$ zaprto omejeno območje. Če je $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, potem je tudi integrabilna na G . Velja tudi: če je f omejena na G in nezvezna le na množici $G_0 \subset G$ z $V(G_0) = 0$, potem je integrabilna na G .

Za zaprto omejeno območje $G \subset \mathbb{R}^3$ in integrabilni funkciji $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}$ velja:

1. $\iiint_G (f + g) \, dV = \iiint_G f \, dV + \iiint_G g \, dV$
2. $\iiint_G \lambda f \, dV = \lambda \iiint_G f \, dV$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Za zaprti omejeni območji $G_1, G_2 \subseteq G \subset \mathbb{R}^3$ z $V(G_1 \cap G_2) = 0$ je

$$\iiint_{G_1} f \, dV + \iiint_{G_2} f \, dV = \iiint_{G_1 \cup G_2} f \, dV.$$

4. Če je $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ za vsak $(x, y, z) \in G$, potem je

$$\iiint_G f \, dV \leq \iiint_G g \, dV.$$

5. $\left| \iiint_G f \, dV \right| \leq \iiint_G |f| \, dV$.

6. $\iiint_G 1 \, dV = V(G)$ (= volumen območja G).

7. Če je f zvezna funkcija in G povezano območje, potem obstaja $(x_0, y_0, z_0) \in G$, da je *povprečna vrednost f na G* enaka

$$\bar{f} := f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V(G)} \iiint_G f \, dV.$$

2.8 Izračun trojnega integrala

Naj bo $G \subset \mathbb{R}^3$ zaprto omejeno območje z definirano prostornino in $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Trojni integral f po G izračunamo na naslednje načine v odvisnosti od oblike območja G .

1. $G = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$:

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) \, dz = \dots$$

2. $G = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^2$ zaprto in omejeno območje in sta $z_1, z_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni funkciji:

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy \equiv \iint_D dx \, dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz.$$

3. $D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in G\}$ je prerez telesa G na višini z projiciran na (x, y) -ravnino, ki je neprazen za $z \in [z_1, z_2]$:

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\iint_{D(z)} f(x, y, z) \, dx \, dy \right) dz \equiv \int_{z_1}^{z_2} dz \iint_{D(z)} f(x, y, z) \, dx \, dy.$$

4. Analogno v drugih smereh, splošnejše območje G razrežemo na enostavnejše kose.

2.9 Uvedba novih spremenljivk v trojni integral

Naj bo $f: G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija ter

- (i) $U \subset \mathbb{R}^3$ odprta množica,
- (ii) $x, y, z: U \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljive funkcije,
- (iii) $\Phi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ injektivna na $U \setminus U_0$ in $\det \mathcal{J}(\Phi)(u, v, w) \neq 0$ za vse $(u, v, w) \in U \setminus U_0$, kjer je $V(U_0) = 0$,
- (iv) $\Gamma \subset U$ zaprto omejeno območje, za katero je $G = \Phi(\Gamma)$.

Potem velja:

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Gamma} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |\det \mathcal{J}(\Phi)(u, v, w)| \, du \, dv \, dw.$$

Posebna primera:

- *Cilindrske koordinate:* $\Phi(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$, $\det \mathcal{J}(\Phi)(r, \varphi, z) = r$,
- *Sferne koordinate:* $\Phi(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$, $\det \mathcal{J}(\Phi)(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \cos \vartheta$.

2.10 Uporaba trojnega integrala

Prostornina

Za $G \subset \mathbb{R}^3$ je

$$V(G) = \iiint_G 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Masa, težišče, vztrajnostni moment

Naj bo G telo z zvezno gostoto $\rho(x, y, z)$ v točki (x, y, z) . Potem so

- *masa telesa G :*

$$m(G) = \iiint_G \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

- *koordinate težišča (ali masnega središča) $T(x_T, y_T, z_T)$ in geometrijskega središča $S_0(x_0, y_0, z_0)$:*

$$x_T = \frac{1}{m(G)} \iiint_G x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad x_0 = \frac{1}{V(G)} \iiint_G x \, dx \, dy \, dz,$$

$$y_T = \frac{1}{m(G)} \iiint_G y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad y_0 = \frac{1}{V(G)} \iiint_G y \, dx \, dy \, dz,$$

$$z_T = \frac{1}{m(G)} \iiint_G z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad z_0 = \frac{1}{V(G)} \iiint_G z \, dx \, dy \, dz,$$

- *vztrajnostni momenti I_x glede na os x , I_y glede na os y , I_z glede na os z in I_0 glede na izhodišče:*

$$I_x(G) = \iiint_G (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad I_y(G) = \iiint_G (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$I_z(G) = \iiint_G (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad I_0(G) = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

2.11 Integrali s parametrom

Trditev. Naj bo $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ in $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$F(y) := \int_a^b f(x, y) \, dx.$$

Če je funkcija f zvezna, je zvezna tudi F . Če je f zvezno parcialno odvedljiva po y , potem je F tudi odvedljiva in velja:

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \, dx.$$

Trditev. Naj bosta $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljivi funkciji za kateri velja $a(y) \leq b(y)$ za vse $y \in I$, $\{(x, y) \mid y \in I, a(y) \leq x \leq b(y)\} \subseteq D$ odprta množica v $\mathbb{R}^2$ in funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna ter zvezno parcialno odvedljiva po y . Potem je $F: I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(y) := \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) \, dx,$$

odvedljiva funkcija in velja

$$F'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(b(y), y) \cdot b'(y) - f(a(y), y) \cdot a'(y).$$

Eulerjevi funkciji gama in beta

$$\begin{aligned}\Gamma(y) &:= \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx, \quad y > 0, \\ B(p, q) &:= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt, \quad p, q > 0.\end{aligned}$$

Nekaj lastnosti:

1. $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$,
2. $\Gamma(n+1) = n!$ za $n \in \mathbb{N}$,
3. $\Gamma(y)\Gamma(1-y) = \frac{\pi}{\sin \pi y}$ za $0 < y < 1$,
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,
5. $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$,
6. $B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \varphi \cos^{2q-1} \varphi d\varphi$.

3 Krivulje in krivuljni integral

3.1 Krivulja, pot, parametrizacija

Pot je zvezna vektorska funkcija $\vec{p}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\vec{p}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b].$$

Zalogo vrednosti te preslikave imenujemo *krivulja*:

$$\mathcal{K} := \vec{p}([a, b]) = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Pot $\vec{p}$ oziroma krivuljo $\mathcal{K}$ imenujemo

- *gladka* (ali *razreda* C^1), če je $\vec{p}$ zvezno odvedljiva,
- *razreda* C^r , če je $\vec{p}$ r -krat zvezno odvedljiva,
- *enostavna*, če je $\vec{p}$ injektivna na $[a, b]$,
- *sklenjena*, če je $\vec{p}(a) = \vec{p}(b)$,
- *regularna*, če je gladka in $\dot{\vec{p}}(t) \neq 0$ za vse $t \in [a, b]$.

Parametrizacija krivulje $\mathcal{K}$ je enostavna pot katere zaloga vrednosti je $\mathcal{K}$.

3.2 Dolžina krivulje in naravni parameter

Pot $\vec{p}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ je *izmerljiva*, če obstaja supremum množice dolžin poligonskih črt

$$S := \left\{ \sum_{k=1}^n |\vec{p}(t_k) - \vec{p}(t_{k-1})| \mid n \in \mathbb{N}, t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

Dolžina izmerljive poti $\vec{p}$ je enaka $s(\vec{p}) := \sup S$.

Gladka pot je izmerljiva in njena dolžina je enaka

$$s(\vec{p}) = \int_a^b \left| \dot{\vec{p}}(t) \right| dt.$$

Za gladko krivuljo $\mathcal{K}$ s parametrizacijo $\vec{p}$ je *ločna dolžina* $\mathcal{K}$ enaka $s(\mathcal{K}) := s(\vec{p})$. Dolžina krivulje je neodvisna od parametrizacije.

Parametrizacija $\vec{r}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gladke krivulje $\mathcal{K}$ je *naravna*, če je $|\vec{r}'(s)| = 1$ za vse $s \in [\alpha, \beta]$. Parameter s imenujemo *naravni parameter*.

Vsako regularno krivuljo lahko parametriziramo z naravnim parametrom. Če je $\vec{p}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ neka regularna parametrizacija, naravni parameter te krivulje dobimo z integralom

$$s(t) = \int_a^t \left| \dot{\vec{p}}(\tau) \right| d\tau.$$

3.3 Osnovni trieder krivulje

Naj bo $\mathcal{K}$ krivulja v $\mathbb{R}^3$ razreda C^3 z naravno parametrizacijo $\vec{r}(s)$ oziroma poljubno regularno parametrizacijo $\vec{p}(t)$. Zanj definiramo:

- *tangentni vektor*

$$\vec{T}(s) = \vec{r}'(s) \quad \text{oziroma} \quad \vec{T}(t) = \frac{\dot{\vec{p}}(t)}{|\dot{\vec{p}}(t)|},$$

- *vektor glavne normale*

$$\vec{N}(s) = \frac{\vec{r}''(s)}{|\vec{r}''(s)|} \quad \text{oziroma} \quad \vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t),$$

- *vektor binormale*

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s) \quad \text{oziroma} \quad \vec{B}(t) = \frac{\dot{\vec{p}}(t) \times \ddot{\vec{p}}(t)}{|\dot{\vec{p}}(t) \times \ddot{\vec{p}}(t)|},$$

- *fleksijsko ukrivljenost ali upognjenost*

$$\kappa(s) = |\vec{T}'(s)| = |\vec{r}''(s)| \quad \text{oziroma} \quad \kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{p}}(t) \times \ddot{\vec{p}}(t)|}{|\dot{\vec{p}}(t)|^3},$$

- *torzijsko ukrivljenost ali zvitost*

$$\omega(s) = \tau(s) = -\vec{N}(s) \cdot \vec{B}'(s) \quad \text{oziroma} \quad \omega(t) = \tau(t) = \frac{[\dot{\vec{p}}(t), \ddot{\vec{p}}(t), \ddot{\vec{p}}(t)]}{|\dot{\vec{p}}(t) \times \ddot{\vec{p}}(t)|^2},$$

- *pritisnjeno ravnino*, ki jo napenjata $\vec{T}$ in $\vec{N}$ ter ima normalo $\vec{B}$,
- *normalno ravnino*, ki jo napenjata $\vec{N}$ in $\vec{B}$ ter ima normalo $\vec{T}$,
- *rektifikacijsko ravnino*, ki jo napenjata $\vec{T}$ in $\vec{B}$ ter ima normalo $\vec{N}$,
- *krivinski polmer* $\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ (za $\kappa(t) \neq 0$),
- *pritisnjeno krožnica* v točki $\vec{r}(t)$, ki leži v pritisnjeni ravnini, ima polmer $\rho(t)$ in središče v točki $\vec{r}(t) + \rho(t)\vec{N}(t)$.

Trojica $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ v vsaki točki krivulje tvori desnosučno ortonorminarno bazo $\mathbb{R}^3$, ki jo imenujemo *osnovni trieder* krivulje $\mathcal{K}$. Vektorje osnovnega triedra povezujejo *Frenet-Serrejeve formule*:

$$\begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \omega(s) \\ 0 & -\omega(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T}(s) \\ \vec{N}(s) \\ \vec{B}(s) \end{bmatrix}.$$

Velja še:

- $\mathcal{K}$ leži na premici $\iff \kappa(t) = 0$ za vse t ,
- če $\kappa(t) \neq 0$: $\mathcal{K}$ leži na ravnini $\iff \omega(t) = 0$ za vse t .

3.4 Krivuljni integral I. vrste

Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$ enostavna krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{p}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ in $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalarna funkcija vektorskega argumenta (tj. *skalarno polje*), ki je zvezna na $\mathcal{K}$. *Krivuljni integral I. vrste funkcije u po krivulji $\mathcal{K}$* definiramo kot

$$\int_{\mathcal{K}} u \, ds := \int_a^b u(\vec{p}(t)) \left| \dot{\vec{p}}(t) \right| dt.$$

Lastnosti:

1. Integral je neodvisen od izbire parametrizacije.
2. Za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in poljubni zvezni skalarni polji u_1, u_2 je

$$\int_{\mathcal{K}} (\alpha u_1 + \beta u_2) \, ds = \alpha \int_{\mathcal{K}} u_1 \, ds + \beta \int_{\mathcal{K}} u_2 \, ds.$$

3. Če krivulji $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ nimata skupne notranje točke, tj. $s(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2) = 0$, velja

$$\int_{\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2} u \, ds = \int_{\mathcal{K}_1} u \, ds + \int_{\mathcal{K}_2} u \, ds.$$

$$4. \left| \int_{\mathcal{K}} u \, ds \right| \leq \int_{\mathcal{K}} |u| \, ds.$$

Primeri uporabe:

- *dolžina* krivulje: $s(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} 1 \, ds$
- *masa* tanke žice $\mathcal{K}$ z zvezno gostoto $\rho(x, y, z)$: $m(\mathcal{K}) = \int_{\mathcal{K}} \rho \, ds$,
- *koordinate težišča* (ali masnega središča) $T(x_T, y_T, z_T)$ in *geometrijskega središča* $S_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{m(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} x \rho \, ds, & x_0 &= \frac{1}{s(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} x \, ds, \\ y_T &= \frac{1}{m(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} y \rho \, ds, & y_0 &= \frac{1}{s(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} y \, ds, \\ z_T &= \frac{1}{m(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} z \rho \, ds, & z_0 &= \frac{1}{s(\mathcal{K})} \int_{\mathcal{K}} z \, ds. \end{aligned}$$

3.5 Krivuljni integral II. vrste

Orientacija krivulje

Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$ enostavna krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{p}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. *Orientacija krivulje $\mathcal{K}$* je zvezna vektorska funkcija $\vec{\tau}: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^3$, za katero je $\vec{\tau}(A)$ v vsaki točki $A \in \mathcal{K}$ enotski tangenti vektor na $\mathcal{K}$. Dvojico $\vec{\mathcal{K}} = (\mathcal{K}, \vec{\tau})$ imenujemo *orientirana krivulja*.

- Orientacijo, ki jo porodi parametrizacija $\vec{p}$,

$$\vec{\tau}_{\vec{p}}(t) := \frac{\dot{\vec{p}}(t)}{|\dot{\vec{p}}(t)|}$$

imenujemo *inducirana orientacija* krivulje $\mathcal{K}$.

- Krivulji $\vec{\mathcal{K}} = (\mathcal{K}, \vec{\tau})$ nasprotno orientirano krivuljo označimo: $-\vec{\mathcal{K}} := (\mathcal{K}, -\vec{\tau})$.
- Če je orientacija krivulje podana z začetno točko A in končno točko B , pišemo: $\vec{\mathcal{K}}_{AB}$.
- Za $\vec{\mathcal{K}}_1 = (\mathcal{K}_1, \vec{\tau}_1) = \vec{\mathcal{K}}_{AB}$ in $\vec{\mathcal{K}}_2 = (\mathcal{K}_2, \vec{\tau}_2) = \vec{\mathcal{K}}_{BC}$, je orientirana vsota krivulj $\vec{\mathcal{K}}_1 + \vec{\mathcal{K}}_2 := (\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2, (\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2))$.

Definicija krivuljnega integrala II. vrste

Naj bo $\vec{\mathcal{K}} = (\mathcal{K}, \vec{\tau})$ enostavna orientirana krivulja z regularno parametrizacijo $\vec{p}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, za katero se inducirana orientacija $\vec{\tau}_{\vec{p}}$ ujema s $\vec{\tau}$, ter $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorska funkcija vektorskega argumenta (tj. *vektorsko polje*), ki je zvezna na $\mathcal{K}$. *Krivuljni integral II. vrste funkcije $\vec{F}$ po krivulji $\vec{\mathcal{K}}$* je

$$\int_{\vec{\mathcal{K}}} \vec{F} d\vec{s} := \int_{\mathcal{K}} (\vec{F} \cdot \vec{\tau}) ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{p}(t)) \cdot \dot{\vec{p}}(t) dt.$$

- Če je $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, uporabljamo tudi zapis

$$\int_{\vec{\mathcal{K}}} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\mathcal{K}} P dx + Q dy + R dz.$$

- Integral po sklenjeni krivulji označimo $\oint_{\vec{\mathcal{K}}} \vec{F} d\vec{s}$.

Lastnosti:

- Integral je pri podani orientaciji krivulje neodvisen od izbire parametrizacije z ustrezno orientacijo.
- Za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in poljubni zvezni vektorski polji $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ velja:

$$\int_{\vec{\mathcal{K}}} (\alpha \vec{F}_1 + \beta \vec{F}_2) d\vec{s} = \alpha \int_{\vec{\mathcal{K}}} \vec{F}_1 d\vec{s} + \beta \int_{\vec{\mathcal{K}}} \vec{F}_2 d\vec{s}.$$

- $\int_{-\vec{\mathcal{K}}} \vec{F} d\vec{s} = - \int_{\vec{\mathcal{K}}} \vec{F} d\vec{s}$.
- Za orientirano vsoto krivulj brez skupne notranje točke velja:

$$\int_{\vec{\mathcal{K}}_1 + \vec{\mathcal{K}}_2} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\vec{\mathcal{K}}_1} \vec{F} d\vec{s} + \int_{\vec{\mathcal{K}}_2} \vec{F} d\vec{s}.$$

- $\left| \int_{\vec{\mathcal{K}}} \vec{F} d\vec{s} \right| \leq \int_{\mathcal{K}} |\vec{F}| ds.$

Potencial vektorskega polja

Vektorsko polje $\vec{F}$ imenujemo *potencialno (gradientno, konzervativno)*, če obstaja tako zvezno parcialno odvedljivo skalarno polje u (= *potencial* polja $\vec{F}$), da je

$$\text{grad}(u) = \vec{F}.$$

Za odprto povezano območje $D \subset \mathbb{R}^3$ in zvezno vektorsko polje $\vec{F}$ na D so ekvivalentne trditve:

- (i) $\vec{F}$ je potencialno polje s potencialom u .
- (ii) Za poljubno regularno enostavno krivuljo $\mathcal{K} \subset D$ velja

$$\int_{\vec{\mathcal{K}}_{AB}} \vec{F} d\vec{s} = u(B) - u(A).$$

- (iii) Za poljubno regularno enostavno sklenjeno krivuljo $\mathcal{K} \subset D$ velja

$$\oint_{\vec{\mathcal{K}}} \vec{F} d\vec{s} = 0.$$

3.6 Greenova formula

Naj bo rob območja $D \subset \mathbb{R}^2$ sklenjena krivulja $\partial D = \mathcal{K}$. Rob je *pozitivno orientiran*, če imamo pri obhodu $\vec{\partial D} = \vec{\mathcal{K}}$ bližnje točke D ves čas na levi.

Izrek (Green). Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ odprto območje, skalarni polji P in Q zvezno parcialno odvedljivi na Ω in $D \subset \Omega$ omejeno območje z odsekoma gladkim robom. Potem je

$$\oint_{\vec{\partial D}} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

kjer je $\vec{\partial D} = \vec{\mathcal{K}}_1 + \dots + \vec{\mathcal{K}}_n$ pozitivno orientiran rob in $\mathcal{K}_i$, $i = 1, \dots, n$, enostavne regularne krivulje.

Povezano območje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ imenujemo *enostavno povezano*, če za poljubno območje D , za katerega je $\partial D \subseteq \Omega$, velja $D \subseteq \Omega$.

Posledice Greenove formule:

1. Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ odprto enostavno povezano območje in skalarni polji P in Q zvezno parcialno odvedljivi na Ω . Potem je vektorsko polje $\vec{F}(x, y) := (P(x, y), Q(x, y))$ potencialno na Ω natanko tedaj, ko je

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \text{za vse } (x, y) \in \Omega.$$

2. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ omejeno območje z odsekoma gladkim robom. Potem je

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_{\vec{\partial D}} x dy - y dx.$$

4 Ploskve in ploskovni integral

4.1 Ploskve v prostoru

Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^2$ odprto območje, $\vec{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ zvezna preslikava in $\Delta \subset U$ zaprto omejeno območje. Množico $\mathcal{P} := \vec{r}(\Delta)$ imenujemo *ploskev s parametrizacijo* $\vec{r}$.

Preslikavo $\vec{r}$ imenujemo *regularna parametrizacija* ploskve $\mathcal{P}$, če je zvezno parcialno odvedljiva, injektivna, ter je

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) (u, v) \neq \vec{0} \quad \text{za vse } (u, v) \in U.$$

Ploskev, za katero obstaja regularna parametrizacija, imenujemo *gladka elementarna ploskev*. Rob ploskve je krivulja: $\partial \mathcal{P} = \vec{r}(\partial \Delta)$. Odsekoma gladka ploskev je unija gladih elementarnih ploskev, ki se sekajo kvečjemu na robu in paroma.

4.2 Tangentna ravnina

Naj bo $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ gladka elementarna ploskev z regularno parametrizacijo $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$. Tangentna ravnina ploskve $\mathcal{P}$ v točki $T_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ je ravnina, ki se v T_0 najboljše prilega ploskvi. Normalni vektor te ravnine:

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Posebna primera:

- eksplicitno podana ploskev $z = z(x, y)$: $\vec{n} = (p, q, -1)$, kjer sta $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ in $q = \frac{\partial z}{\partial y}$,
- implicitno podana ploskev $g(x, y, z) = 0$: $\vec{n} = \text{grad}(g)$.

4.3 Površina gladke elementarne ploskve

Naj bo $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ gladka elementarna ploskev z regularno parametrizacijo $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$. Potem je *površina ploskve* $\mathcal{P}$ enaka

$$S(\mathcal{P}) := \iint_{\Delta} \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) (u, v) \right| du dv = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

kjer so $E = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|^2$, $F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ in $G = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2$. Površina ni odvisna od parametrizacije. Posebni primeri:

- eksplicitno podana ploskev $z = z(x, y)$: $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$,
- ploskev na valju $x^2 + y^2 = a^2$, parametrizirana s cilindričnimi koordinatami $\vec{r}(\varphi, z) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, z)$: $\sqrt{EG - F^2} = a$,
- ploskev na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, parametrizirana s sfernimi koordinatami $\vec{r}(\varphi, \vartheta) = (a \cos \varphi \cos \vartheta, a \sin \varphi \cos \vartheta, a \sin \vartheta)$: $\sqrt{EG - F^2} = a^2 |\cos \vartheta|$.

4.4 Ploskovni integral I. vrste

Naj bo $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ gladka elementarna ploskev z regularno parametrizacijo $\vec{r}: \Delta \rightarrow \mathcal{P}$ in $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna skalarna funkcija. *Ploskovni integral I. vrste* funkcije f po ploskvi $\mathcal{P}$ je

$$\iint_{\mathcal{P}} f \, dS := \iint_{\Delta} f(\vec{r}(u, v)) \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)(u, v) \right| du \, dv.$$

Za odsekoma gladko ploskev $\mathcal{P}$ ki jo tvorijo gladke elementarne ploskve $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ definiramo

$$\iint_{\mathcal{P}} f \, dS := \sum_{i=1}^n \iint_{\mathcal{P}_i} f \, dS.$$

Lastnosti:

1. Integral je neodvisen od izbire parametrizacije in razčlenitve na gladke elementarne ploskve.
2. $\iint_{\mathcal{P}} (\alpha f_1 + \beta f_2) \, dS = \alpha \iint_{\mathcal{P}} f_1 \, dS + \beta \iint_{\mathcal{P}} f_2 \, dS$, za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in zvezna skalarna polja f_1, f_2 .
3. $\iint_{\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2} f \, dS = \iint_{\mathcal{P}_1} f \, dS + \iint_{\mathcal{P}_2} f \, dS$, če ploskvi nimata skupne notranje točke, tj. $S(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) = 0$.
4. Če je $f_1(x, y, z) \leq f_2(x, y, z)$ za vse $(x, y, z) \in \mathcal{P}$, potem je $\iint_{\mathcal{P}} f_1 \, dS \leq \iint_{\mathcal{P}} f_2 \, dS$.
5. $\left| \iint_{\mathcal{P}} f \, dS \right| \leq \iint_{\mathcal{P}} |f| \, dS$.

Primeri uporabe:

- *površina* ploskve: $S(\mathcal{P}) = \iint_{\mathcal{P}} 1 \, dS$,
- *masa* tanke plošče $\mathcal{P}$ z zvezno gostoto $\rho(x, y, z)$: $m(\mathcal{P}) = \iint_{\mathcal{P}} \rho \, dS$,
- *koordinate težišča* (ali masnega središča) $T(x_T, y_T, z_T)$ in *geometrijskega središča* $S_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{m(\mathcal{P})} \iint_{\mathcal{P}} x \rho \, dS, & x_0 &= \frac{1}{S(\mathcal{P})} \iint_{\mathcal{P}} x \, dS, \\ y_T &= \frac{1}{m(\mathcal{P})} \iint_{\mathcal{P}} y \rho \, dS, & y_0 &= \frac{1}{S(\mathcal{P})} \iint_{\mathcal{P}} y \, dS, \\ z_T &= \frac{1}{m(\mathcal{P})} \iint_{\mathcal{P}} z \rho \, dS, & z_0 &= \frac{1}{S(\mathcal{P})} \iint_{\mathcal{P}} z \, dS. \end{aligned}$$

4.5 Ploskovni integral II. vrste

Orientacija ploskve

Naj bo $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ gladka elementarna ploskev z regularno parametrizacijo $\vec{r}: \Delta \rightarrow \mathcal{P}$. *Orientacija ploskve* $\mathcal{P}$ je zvezna vektorska funkcija $\vec{v}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$, za katero je $\vec{v}(T)$ enotski normalni vektor

tangentne ravnine na $\mathcal{P}$ v točki T za vse $T \in \mathcal{P}$. Dvojico $\vec{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, \vec{\nu})$ imenujemo *orientirana ploskev*.

S parametrizacijo $\vec{r}$ *inducirana orientacija* ploskve $\mathcal{P}$ je $\vec{\nu}_{\vec{r}} := \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}$.

Orientacija $\vec{\nu}$ inducira tudi *orientacijo roba* $\vec{\tau}_{\vec{\nu}}$ ploskve $\vec{\partial}\mathcal{P}$ tako, da vektor $\vec{\nu} \times \vec{\tau}_{\vec{\nu}}$ vedno kaže v ploskev $\mathcal{P}$.

Gladke elementarne orientirane ploskve $\vec{\mathcal{P}}_i = (\mathcal{P}_i, \vec{\nu}_i)$, $i = 1, \dots, n$, so *skladno orientirane*, če sta za vse $i \neq j$ inducirani orientaciji roba $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j$ na skupnih delih nasprotni.

Orientirana vsota ploskev je $\vec{\mathcal{P}}_1 + \dots + \vec{\mathcal{P}}_n$, kjer so vse $\vec{\mathcal{P}}_i$ skladno orientirane.

Definicija ploskovnega integrala II. vrste

Ploskovni integral II. vrste zveznega vektorskega polja $\vec{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ po gladki elementarni orientirani ploskvi $\vec{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, \vec{\nu})$ definiramo kot

$$\iint_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{F} d\vec{S} := \iint_{\mathcal{P}} (\vec{F}\vec{\nu}) dS.$$

Količino $\iint_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{F} d\vec{S}$ imenujemo tudi *skalarni pretok vektorskega polja $\vec{F}$ skozi ploskev $\vec{\mathcal{P}}$* .

Če je $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}_1 + \dots + \vec{\mathcal{P}}_n$ orientirana vsota gladkih elementarnih ploskev, definiramo

$$\iint_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{F} d\vec{S} := \sum_{i=1}^n \iint_{\vec{\mathcal{P}}_i} \vec{F} d\vec{S}.$$

Za $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ uporabljamo tudi zapis

$$\iint_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{F} d\vec{S} = \iint_{\vec{\mathcal{P}}} P dy dz + Q dx dz + R dx dy.$$

Lastnosti:

1. Integral je neodvisen od razčlenitve na orientirano vsoto gladkih elementarnih ploskev.
2. $\iint_{\vec{\mathcal{P}}} (\alpha \vec{F}_1 + \beta \vec{F}_2) d\vec{S} = \alpha \iint_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{F}_1 d\vec{S} + \beta \iint_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{F}_2 d\vec{S}$, za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in zvezna vektorska polja $\vec{F}_1, \vec{F}_2$.
3. $\iint_{-\vec{\mathcal{P}}} \vec{F} d\vec{S} = - \iint_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{F} d\vec{S}$.
4. $\iint_{\vec{\mathcal{P}}_1 + \vec{\mathcal{P}}_2} \vec{F} d\vec{S} = \iint_{\vec{\mathcal{P}}_1} \vec{F} d\vec{S} + \iint_{\vec{\mathcal{P}}_2} \vec{F} d\vec{S}$, kjer je $\vec{\mathcal{P}}_1 + \vec{\mathcal{P}}_2$ orientirana vsota ploskev in $S(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) = 0$.
5. $\left| \iint_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{F} d\vec{S} \right| \leq \iint_{\mathcal{P}} |\vec{F}| dS$.

Izračun ploskovnega integrala II. vrste

Naj bo $\vec{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, \vec{\nu})$ gladka elementarna orientirana ploskev s parametrizacijo $\vec{r}: \Delta \rightarrow \mathcal{P}$, za katero se inducirana orientacija $\vec{\nu}_{\vec{r}}$ ujema z $\vec{\nu}$, ter $\vec{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ zvezno vektorsko polje. Potem je

$$\iint_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{F} d\vec{S} = \iint_{\Delta} \left[\vec{F}(\vec{r}(u, v)), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right] du dv.$$

4.6 Diferencialni operatorji

Naj bo $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljivo skalarno polje in $\vec{F} = (P, Q, R): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zvezno parcialno odvedljivo vektorsko polje. Potem so:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} u &= \text{grad } u := \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \dots \text{gradient } u, \\ \vec{\nabla} \vec{F} &= \text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \dots \text{divergenca } \vec{F}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad \dots \text{rotor } \vec{F}. \end{aligned}$$

4.7 Stokesov izrek

Izrek (Stokes). Naj bo $\vec{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, \vec{\nu})$ odsekoma gladka orientirana ploskev katere rob $\vec{\partial}\mathcal{P}$ je orientirana odsekoma gladka krivulja, pri čemer sta orientaciji $\vec{\mathcal{P}}$ in $\vec{\partial}\mathcal{P}$ usklajeni. Naj bo $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ zvezno parcialno odvedljivo vektorsko polje na odprtem območju $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ki vsebuje $\mathcal{P}$. Potem velja

$$\oint_{\vec{\partial}\mathcal{P}} \vec{F} d\vec{s} = \iint_{\vec{\mathcal{P}}} \text{rot } \vec{F} d\vec{S}.$$

Območje $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ imenujemo *enostavno povezano*, če na vsako enostavno sklenjeno odsekoma regularno krivuljo $\mathcal{K} \subset \Omega$ lahko napnemo gladko ploskev $\mathcal{P}$, ki vsa leži v Ω : $\partial\mathcal{P} = \mathcal{K}$ in $\mathcal{P} \subset \Omega$.

Posledica. Za zvezno parcialno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ na odprtem in enostavno povezanem območju $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ velja:

$$\vec{F} \text{ je potencialno} \iff \text{rot } \vec{F}(x, y, z) = \vec{0} \text{ za vse } (x, y, z) \in \Omega.$$

4.8 Gaussov izrek (o divergenci)

Izrek (Gauss). Naj bo $G \subset \mathbb{R}^3$ omejeno območje, katerega rob je sklenjena odsekoma gladka ploskev ∂G , ki jo orientiramo z zunanjimi normalami. Za zvezno parcialno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ na odprtem območju $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ki vsebuje G , velja:

$$\oint_{\vec{\partial}G} \vec{F} d\vec{S} = \iiint_G \text{div } \vec{F} dV.$$

Posledica. Za omejeno območje $G \subset \mathbb{R}^3$, ki ustreza pogojem v Gaussovem izreku, velja:

$$V(G) = \frac{1}{3} \oint_{\vec{\partial}G} x dy dz + y dx dz + z dx dy.$$

5 Diferencialne enačbe

5.1 Uvod

Diferencialna enačba je enačba, ki povezuje neznano funkcijo in njene odvode. *Rešitev* diferencialne enačbe je funkcija, ki to enačbo identično izpolni. Množica vseh rešitev diferencialne enačbe se imenuje *splošna rešitev* diferencialne enačbe. Ločimo:

- *navadne diferencialne enačbe*, kjer nastopa le ena neodvisna spremenljivka in navadni odvodi, rešitev je funkcija ene spremenljivke;
- *parcialne diferencialne enačbe*, kjer je neodvisnih spremenljivk več, vsebuje parcialne odvode, rešitev je funkcija več spremenljivk.

Red diferencialne enačbe je red najvišjega odvoda, ki nastopa v enačbi.

5.2 Navadne diferencialne enačbe 1. reda

Splošna enačba je oblike $F(x, y, y') = 0$, kjer je $y = y(x)$.

Posebni primeri NDE 1. reda

1. *Primitivna funkcija*:

$$y' = f(x),$$

kjer je f dana funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Rešitev: $y = \int f(x) dx + C, C \in \mathbb{R}$.

2. *Enačba z ločljivimi spremenljivkami*:

$$y' = f(x)g(y),$$

kjer sta f in g dani funkciji na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Enačbo preoblikujemo: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ in integriramo vsako stran posebej (pozor: primer $g(y) = 0$ obravnavamo ločeno).

3. *Linearna diferencialna enačba 1. reda*:

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1}$$

kjer sta p in q zvezni funkciji na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Rešitev enačbe je oblike

$$y = y_H + y_P,$$

kjer je y_H splošna rešitev *prirejene homogene enačbe*

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2}$$

in y_P *partikularna ali delna rešitev* enačbe (1). Enačba (2) ima ločljive spremenljivke in rešitev oblike

$$y_H = Ce^{P(x)}, \quad P(x) = - \int p(x) dx, \quad C \in \mathbb{R},$$

medtem ko y_P bodisi uganemo bodisi uporabimo *metodo variacije parametrov (konstant)* kjer rešitev iščemo z nastavkom $y_P = C(x)e^{P(x)}$.

Geometrijski pomen

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ in $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Enačba

$$f(x, y) = k = \tan \alpha$$

v vsaki točki $(x, y) \in D$ definira *polje smeri* v D . Rešitve diferencialne enačbe

$$y' = f(x, y)$$

so krivulje v D , ki se v vsaki točki prilegajo polju smeri. *Izokline* so krivulje v D , vzdolž katerih je f konstantna.

Naj bo $\mathcal{K}$ dana družine krivulj v $\mathbb{R}^2$. *Ortogonalne trajektorije* družine $\mathcal{K}$ so krivulje, ki v vsaki točki sekajo krivulje iz $\mathcal{K}$ pod pravim kotom. Če krivulje iz $\mathcal{K}$ zadoščajo enačbi

$$y' = f(x, y),$$

je diferencialna enačba ortogonalnih trajektorij

$$-\frac{1}{y'} = f(x, y).$$

Obstoj in enoličnost rešitve

Začetni problem ali Cauchyjeva naloga imenujemo diferencialno enačbo skupaj z začetnim pogojem:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (3)$$

Izrek (Lokalni eksistenčni izrek). Če je f zvezna na območju $D \subseteq \mathbb{R}^2$, potem obstaja vsaj ena rešitev začetnega problema (3) za $(x_0, y_0) \in D$. Če je na D zvezna tudi funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}$, potem ima za vsak $(x_0, y_0) \in D$ začetni problem (3) eno samo rešitev na D .

5.3 Navadne diferencialne enačbe 2. reda

Splošna enačba je oblike $F(x, y, y', y'') = 0$, kjer je $y = y(x)$. Za ustrezen začetni problem potrebujemo 2 začetna pogoja oblike

$$y(x_0) = a, \quad y'(x_0) = b.$$

Posebni primeri enačb:

1. Enačba oblike

$$y'' = f(x),$$

kjer je f dana funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Rešimo jo z dvakratnim zaporednim integriranjem.

2. Enačba oblike

$$y'' = f(x, y'),$$

kjer je f dana funkcija na območju $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Z vpeljavo nove spremenljivke $u = y'$ enačbo prevedemo na diferencialno enačbo 1. reda: $u' = f(x, u)$.

3. Linearna diferencialna enačba 2. reda:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x), \quad (4)$$

kjer so a, b, c, d zvezne funkcije na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ in $a(x) \neq 0$ za $x \in I$. Rešitev enačbe je oblike

$$y = y_H + y_P,$$

kjer je y_H splošna rešitev prirejene homogene enačbe

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (5)$$

in y_P partikularna ali delna rešitev enačbe (4). Pri tem je

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

kjer sta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi enačbe (5). Partikularno rešitev y_P bodisi uganemo bodisi poiščemo z *metodo variacije parametrov (konstant)*, kjer z nastavkom $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ dobimo sistem dveh enačb

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= d(x) \end{aligned}$$

za funkciji $C_1(x)$ in $C_2(x)$.

4. Linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti:

$$ay'' + by' + cy = d(x), \quad (6)$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ter d zvezna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Prirejeno homogeno enačbo

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (7)$$

rešujemo z nastavkom $y = e^{\lambda x}$ in dobimo *karakteristični polinom*

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (8)$$

Za linearno neodvisni rešitvi y_1 in y_2 homogene enačbe (7) velja:

- če sta $\lambda_1 \neq \lambda_2$ realna korena (8), sta $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ in $y_2 = e^{\lambda_2 x}$;
- če je $\lambda \in \mathbb{R}$ dvojni koren (8), sta $y_1 = e^{\lambda x}$ in $y_2 = xe^{\lambda x}$;
- če sta $\lambda = \alpha \pm i\beta$ konjugirana kompleksna korena (8), sta $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ in $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.