NEKAJ VPRAŠANJ IZ MATEMATIKE 2

1. Katero točko evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ imenujemo notranjo (zunanjo, robno) točko množice $M \subset \mathbb{R}^n$?

2. Za poljubno množico $M \subset \mathbb{R}^n$ evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ definirajte množice $\overset{o}{M}$ (notranjost), ∂M (rob) in $\overline{M}$ (zaprtje) !

3. Dokažite, da je v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ rob $\partial B_r(x_0) = \partial \overset{o}{B}_r(x_0) = S_r(x_0)$ (sfera) !

4. Kdaj imenujemo območje $D \subset \mathbb{R}^n$ odprto, zaprto, omejeno in kdaj povezano v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$?

5. Dokažite, da je množica $M := \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, \quad x^3 + y^3 = 1\}$ neomejena v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^2$! Določite še množice $\overset{o}{M}$ (notranjost), ∂M (rob) in $\overline{M}$ (zaprtje) !

6. Dokažite, da je množica $M : \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, \quad x^4 + y^4 = 1\}$ omejena v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^2$!

7. Ali je unija $\bigcup\limits_{n \geq 2} B_{1/n}(x_n)$ omejena množica v $\mathbb{R}^2$, če je
$$x_n = \big((1 + 1/n)^n, (1 - 1/n)^{n-1}\big)\,?$$

8. Dokažite, da je odprta krogla $\overset{o}{B}_r(x_n)$ odprta množica v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$!

9. Dokažite, da je zaprta krogla $B_r(x_n)$ zaprta množica v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$!

10. Dokažite, da je odprt kvadrat $(1,2) \times (0,1)$ odprta množica v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^2$!

11. Prepričajte se, da pravokotnik $(0,2] \times [0,1)$ ni odprta, niti zaprta množica v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^2$!

12. Dokažite, da je odprta krogla $\overset{o}{B}_r(x_n)$ (zaprta krogla $B_r(x_n)$) povezana množica v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$!

13. Če je $\|x_0 - y_0\| < r_1 + r_2$ je množica $B_{r_1}(x_0) \cup B_{r_2}(y_0)$ povezana v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$. Dokažite to !

14. Dokažite enakomerno zveznost funkcije $f(x,y) \equiv x^2 y$ na pravokotniku $[0,2] \times [0,1]$ (na krogu $-$krogli $B_2(3,4)$) !

15. Prepričajte se, da je vsaka linearna preslikava prostora $\mathbb{R}^n$ v prostor $\mathbb{R}^m$ zvezna v vsaki točki !

16. Definicija odvoda skalarne funkcije f vektorske spremenljivke $x = (x_1, ..., x_n)$ v smeri enotskega vektorja $s = (s_1, ..., s_n)$?

17. Definicija prvih parcialnih odvodov funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki (a,b) ?

18. Ali za funkcijo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x,y) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x}, & \text{če je} \quad xy \neq 0 \\ 0, & \text{če je} \quad xy = 0 \end{cases}$, obstaja parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$! Ali je funkcija f zvezna v točkah $(0,0)$ in $(0,1)$?

19. Za funkcijo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{y}{x}, & \text{če je} \quad xy \neq 0 \\ 0, & \text{če je} \quad xy = 0 \end{cases}$, izračunajte po definiciji parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$! Ali je funkcija f zvezna v točkah $(0,0)$ in $(0,1)$?

20. Za funkcijo f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x,y) = \begin{cases} xy/\left(x^2 + y^2\right), & \text{če je } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{če je } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, izračunajte po definiciji njen odvod v točki $(0,0)$ v smeri enotskega vektorja $s = (s_1, s_2)$! Ali je funkcija f zvezna v točki $(0,0)$?

21. Za funkcijo f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kjer je
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(x^2 - y^2\right) / \left(x^2 + y^2\right)^2, & \text{če je } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{če je } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$
izračunajte po definiciji njen odvod v točki $(0,0)$ v smeri enotskega vektorja $s = (s_1, s_2)$! Ali je funkcija f zvezna v točki $(0,0)$?

22. V kateri smeri v točki $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ (D je neprazna, odprta množica v prostoru $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$) zvezno parcialno odvedljiva (diferenciabilna) funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ najhitreje raste (pada) ?

23. Kdaj imenujemo funkcijo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $p-$ krat zvezno parcialno odvedljivo na odprti množici D in kaj pomeni simbol $C^p(D)$?

24. Definirajte odvod (totalni ali Fréchet-jev, Maurice Fréchet: francoski matematik $1878 - 1937$) vektorske funkcije vektorske spremenljivke !

25. Kdaj imenujemo vektorsko funkcijo diferenciabilno ali (totalno) odvedljivo v dani točki ?

26. Prepričajte se, da je vsaka odvedljiva vektorska funkcija vektorske spremenljivke v obravnavani točki nujno zvezna !

27. Če sta vektorski funkciji f in g vektorske spremenljivke (totalno) odvedljivi v točki a, je taka tudi njuna vsota in je odvod $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$. Dokažite to !

28. Formulirajte verižno pravilo za vektorsko funkcijo vektorske spremenljivke !

29. Totalni diferencial je invarianten glede na uvedbo nove spremenljivke. Razložite to trditev !

30. Naj bo S simetrična (sebi adjungirana) preslikava evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ vase, t.j. skalarni produkt $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ za vsak $x, y \in \mathbb{R}^n$. Za funkcijo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x) \equiv \langle Sx, x\rangle$, poiščite odvod $Df(x)$ pri poljubnem x !

31. Ali je za vektorsko funkcijo $f : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n))$ prostora $\mathbb{R}^n$ vase in njen jakobijan $\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ pravilna katera od dveh implikacij:
$\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x) \neq 0$ za vsak $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}$ Funkcija f je injektivna. ?
(Odgovor obvezno utemeljite !)

32. Zapišite formulo za odvod $\varphi'(t_0)$ funkcije φ, $\varphi(t) \equiv f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, če je skalarna funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zvezno parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah na odprti množici D, ki vsebuje točko $(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0))$ in so skalarne funkcije $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ odvedljive v točki t_0 !

33. Naj imata funkciji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ in $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vse svoje komponente zvezno parcialno odvedljive (po vseh spremenljivkah) ter naj bo h kompozitum, $h = g \circ f$, $h(u, v) = g(f(u, v))$ za vsak $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Kako se potem izračuna parcialni odvod $\frac{\partial h}{\partial u}$ v točki (a, b) ?

34. Zapišite Taylorjevo formulo prvega reda (z napako !) za skalarno funkcijo f dveh spremenljivk x in y okrog točke (a, b) !

35. Zapišite Taylorjevo formulo drugega reda z začetno točko (a, b) za funkcijo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ki ima povsod na $\mathbb{R}^2$ zvezne vse parcialne odvode do vključno tretjega reda !

36. Če je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljiva in $\Delta = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$, kako bi določili $\min\limits_{(x,y)\in\Delta} f(x, y)$?

37. Če ima neprazno območje $D \subset \mathbb{R}^2$ definirano ploščino, navedite vsaj en zadostni pogoj za to, da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilna (v Riemannovem smislu)!

38. Navedite primer uporabe dvojnega (Riemannovega) integrala!

39. Ali je funkcija, ki je v osnovnem pomenu Riemannovo integrabilna, nujno omejena?

40. Ali je omejenost funkcije zadosten pogoj za njeno integrabilnost ? (Odgovor **utemeljite !**)

41. Zapišite formulo za izračun dvojnega integrala po območju, ki ima obliko "krivočrtnega trapeza"!

42. Zapišite kakšen zadosten pogoj, ki mu morajo ustrezati funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ ter območji D in $D' \subset D$, da velja enakost $\iint_D f\, dP = 2 \iint_{D'} f\, dP$!

43. Za pravokotnik $D = [0, 1] \times [0, 2]$ utemeljite oceno

$$\frac{2}{e^5} \leq \iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leq 2 \quad !$$

44. Formulirajte izrek o povprečni (srednji) vrednosti funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ na območju $D \subset \mathbb{R}^2$!

45. Zapišite formulo za izračun dvojnega integrala $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$, če je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ c(x) \leq y \leq d(x)\}$ in če je $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d,\ a(y) \leq x \leq b(y)\}$!

46. Zamenjajte vrstni red integriranja v dvakratnem integralu $\int_{-2}^{0} dx \int_{2x}^{-x^2} f(x, y)\, dy$, kjer je f zvezna funkcija $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$!

47. Formulirajte izrek o uvedbi novih spremenljivk v dvojni integral in povejte, kakšen je geometrijski pomen jakobijana!

48. S pomočjo dvojnega integrala izračunajte dvakratni integral $\int_0^1 dy \int_y^1 \sin\left(x^2\right)\, dx$!

49. Definicija trojnega (Riemanovega) integrala $\iiint\limits_D f(x,y)\,dxdy$?

50. Navedite primer uporabe trojnega (Riemannovega) integrala!

51. Navedite vsaj en zadostni pogoj za obstoj trojnega (Riemannovega) integrala!

52. Formulirajte izrek o povprečni (srednji) vrednosti funkcije $f : G \to \mathbb{R}$ na območju $G \subset \mathbb{R}^3$!

53. Zapišite formulo za izračun trojnega integrala $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, če je $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$ in če je $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z_1 \le z \le z_2,$ $(x,y) \in D(z)\}$!

54. Definicija izlimitiranega dvojnega integrala zvezne funkcije konstantnega znaka po neomejenem območju ?

55. Kako bi dokazali enakost $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$?

56. Navedite zadostni pogoj za to, da je funkcija F, $F(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx$ za vsak $y \in [c,d]$, odvedljiva na $[c,d]$! Kako se izraža odvod F' s funkcijo f (pri navedenem pogoju) ?

57. Pri nekem pogoju velja Leibnizova formula za odvod $\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx$. Navedite ta pogoj in zapišite formulo !

58. Definicija realnih funkcij $\mathbf{\Gamma}$ in $\mathbf{B}$ in zveza med njima ?

59. Opišite Stirlingovo formulo in povejte zakaj jo uporabljamo !

60. Skicirajte graf funkcije Γ !

61. Kako lahko izračunamo numerične vrednosti funkcije Γ pri velikih in pri majhnih vrednostih argumenta ?

62. Katero funkcijo realne spremenljivke imenujemo faktorsko ?

63. Za skalarne in vektorske funkcije izpeljite formule za odvode: $\frac{d}{d\tau}\ \vec{f}\ (t(\tau))$, $\frac{d}{dt}\left[\vec{f}\,(t)\ \vec{g}\,(t)\right]$ in $\frac{d}{dt}\left[\vec{f}\,(t)\times \vec{g}\,(t)\right]$!

64. Če je vektorska funkcija $\vec{f}\ (t)$ odvedljiva in ima konstantno absolutno vrednost $\left(\left|\vec{f}\ (t)\right| \equiv konst.\right)$, je za vsak t odvod $\frac{d}{dt}\ \vec{f}\,(t)$ pravokoten na $\vec{f}\,(t)$. Dokažite to !

65. Dani sta skalarna funkcija $\lambda(s)$ in odvedljiva vektorska funkcija $\vec{B}\,(s)$ z lastnostjo, da je $\left|\vec{B}\ (s)\right| \equiv 1$ in $\lambda(s)\,\vec{B}\,(s) \equiv \vec{n} = konst. \neq \vec{0}$. Pokažite, da sta tedaj obe funkciji $\lambda(s)$ in $\vec{B}\,(s)$ konstantni !

66. Ali je kakšna razlika med pojmoma *pot v* $\mathbb{R}^3$ in *krivulja v* $\mathbb{R}^3$? (Definicija obeh pojmov?)

67. Ali je krivulja z enačbo $\vec{r} = \vec{r}\ (t) \equiv (t^2 - 2t^3,\ 2t - t^2,\ 3t^2 - 2t^3 - 4t)$ ravninska? Če je, v kateri ravnini leži ?

68. Ali se krivulji K_1 in K_2 z enačbama $\vec{r} = \vec{r_1}\,(s) \equiv \left(\frac{s^4}{2} - \frac{3}{4}s^2,\ s^2,\ \frac{3}{4}s\right)$ in $\vec{r} = \vec{r_2}\,(t) \equiv (t^2 - t,\ 2t,\ t^2 + t)$ sekata ? Če se, v koliko točkah se sekata ?

69. Katero krivuljo imenujemo gladko, odsekoma gladko, enostavno in enostavno sklenjeno ?

70. Definicija dolžine poti in ločne dolžine krivulje ?

71. Kdaj imenujemo parametrizacijo krivulje naravno ?

72. Ali za vsako enostavno krivuljo razreda C^1 obstaja naravna parametrizacija ?

73. Kako sta definirani (analitično) fleksijska in torzijska in ukrivljenost (κ in ω) gladke enostavne krivulje v dani točki te krivulje ?

74. Ali sta fleksija in torzija krivulje razreda C^3 povsem enolično določeni, t.j. neodvisni od parametrizacije te krivulje ?

75. Kakšen je geometrijski pomen fleksije in torzije?

76. Razložite pojem osnovnega spremljajočega triedra $\left(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\right)$ gladke krivulje razreda C^3 !

77. Kateri vektorji osnovnega triroba v dani točki gladke krivulje razreda C^3 so povsem enolično določeni ?

78. Kakšen je kinematični pomen osnovnega triedra in fleksije krivukje ?

79. Frenet $-$ Serret-jeve formule in njihov pomen ?

80. Definicija krivinskega polmera, pritisnjene krožnice in evolute krivulje ?

81. Kako bi zapisali parametrično enačbo pritisnjene krožnice krivulje K z enačbo $\vec{r}=\vec{f}\,(t)$, $t \in [a,b]$, v točki z radijem vektorjem $\vec{r}_0=\vec{f}\,(t_0)$, kjer je $\vec{f}$ gladka, trikrat zvezno odvedljiva vektorska funkcija?

82. Katere izmed količin $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$, κ in ω so pri gladki krivulji razreda C^3 povsem enolično določene, t.j. neodvisne od parametrizacije ?

83. Za krivuljo K razreda C^3 preverite trditve :
    (i) $\kappa(s) \equiv 0 \iff K$ leži na premici
    (ii) $\omega(s) \equiv 0 \implies K$ je ravninska
    (iii) $\kappa(s) \neq 0 \implies (\omega(s) \equiv 0 \iff K$ je ravninska) **!**

84. Definicija klotoide ?

85. Izpeljite parametrično enačbo klotoide, ki leži nad abscisno osjo in se dotika te osi v koordinatnem začetku !

86. Definicija krivinskega polmera krivulje K razreda C^3 v dani točki in kako bi ga izračunali za krivuljo, ki leži v ravnini $0xy$ in ima enačbo $y = y(x)$?

87. Kako bi zapisali parametrično enačbo pritisnjene krožnice krivulje K z enačbo $\vec{r}=\vec{f}\,(t)$, $t \in [a,b]$, v točki z radijem vektorjem $\vec{r}_0=\vec{f}\,(t_0)$, kjer je $\vec{f}$ gladka, trikrat zvezno odvedljiva vektorska funkcija?

88. Definicija evolute krivulje ?

89. Definicija enostavne gladke krivulje K in krivuljnega integrala 1. vrste $\int_K u\,ds$?

90. Naštejte nekaj primerov uporabe krivuljnega integrala 1. vrste !

91. Definicija enostavne, gladke **orientirane** krivulje $\vec{K}$ in krivuljnega integrala 2. vrste $\int_{\vec{K}} \vec{a}\, d\vec{r}$?

92. Za daljico K s krajiščima $A(a_1,a_2,a_3)$ in $B(b_1,b_2,b_3)$ preverite enakost $\int_{K:A}^{B} x\,dy - y\,dx = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$!

93. Dokažite enakost $\int_{-\vec{K}} \vec{a}\, d\vec{r} = -\int_{\vec{K}} \vec{a}\, d\vec{r}$!

94. Preverite oceno $\left|\int_{\vec{K}} \vec{a}\, d\vec{r}\right| \leq \int_K \left|\vec{a}\right| ds$!

95. Formulirajte Greenov teorem o cirkulaciji ravninskega vektorskega polja !

96. Naj bosta funkciji $f(t)$ in $g(t)$ zvezno odvedljivi na intervalu $[\alpha,\beta]$ in naj bo $f(t) \leq g(t)$ za vsak $t \in (\alpha,\beta)$. Naj bo $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ in $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq y \leq \beta,\ f(y) \leq x \leq g(y)\}$. Funkciji $P(x,y)$ in $Q(x,y)$ naj bosta po obeh spremenljivkah zvezno parcialno odvedljivi na odprtem območju $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Dokažite implikaciji:
    (a) $D_1 \subset \mathcal{D} \Longrightarrow \oint_{\partial D_1} P(x,y)\,dx = -\iint_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy$
    (b) $D_2 \subset \mathcal{D} \Longrightarrow \oint_{\partial D_2} Q(x,y)\,dy = -\iint_{D_2} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy$.

97. Za območje $D \subset \mathbb{R}^2$, ki je omejeno z odsekoma gladkim robom ∂D, je ploščina $P(D)$ dana s formulo

$$P(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx \quad .$$

Dokažite jo!

98. Naj bo v ravnini Oxy dana krivulja K v polarni obliki

$$r = r(\varphi)\,, \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]\,, \quad \varphi_1 < \varphi_2\,,$$

kjer je funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ zvezno odvedljiva ($r = \left|\vec{r}\right|$, $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ je radij vektor točke $T(x,y) \in K$).
Območje D v ravnini Oxy naj tvorijo vse daljice, ki imajo eno krajišče skupno in sicer v koordinatnem začetku

in drugo krajišče na krivulji K.
Dokažite, da je tedaj ploščina $P(D)$ območja D dana z enačbo

$$P(D) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\, d\varphi\,.$$

(Upoštevajte prejšnjo izražavo ploščine s krivuljnim integralom!)

99. Naj bo G odprto, povezano območje in vektorsko polje $\vec{v}$ naj bo na G zvezno parcialno odvedljivo po vseh svojih spremenljivkah ter naj bo krivuljni integral $\int\limits_{K:A}^{B} \vec{v}\; d\vec{r}$ odvisen le od začetne točke A in končne točke B krivulje K in nič od oblike krivulje K pri poljubni enostavni, odsekoma gladki krivulji $K \subset G$.
Preverite, da je pri teh pogojih vektorsko polje $\vec{v}$ gradientno na G.

100. Naj bo D neprazno, odprto območje v prostoru $\mathbb{R}^2$ in naj bosta funkciji $P(x,y)$ in $Q(x,y)$ zvezni na D. Navedite zadostni pogoj, ki se nanaša le na območje D ter na funkciji P in Q, da bo krivuljni integral $\int_{K:A}^{B} Pdx + Qdy$ odvisen le od začetne točke A in od končne točke B krivulje K za vsako enostavno, odsekoma gladko krivuljo $K \subset D$!

101. Naj bo G odprto, povezano območje in vektorsko polje $\vec{v}$ naj bo na G gradientno, $\vec{v} = \operatorname{grad} u$. Dokažite, da je tedaj $\int\limits_{K:A}^{B} \vec{v}\; d\vec{r} = u(B) - u(A)$ za vsako enostavno, odsekoma gladko krivuljo $K \subset G$!

102. Prepričajte se, da je gravitacijsko vektorsko polje $\vec{F} = -\kappa \frac{mM}{r^3}\,\vec{r}$ $(\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k})$ gradientno na odprtem območju $G = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$.
Poiščite potencial tega polja na G!

103. Definicija gladke elementarne ploskve in odsekoma gladke ploskve ter njene orientacije ?

104. Katere ploskve imenujemo orientabilne in katere neorientabilne?

105. Izpeljite formulo za površino gladke elementarne ploskve, dane v eksplicitni obliki $z = f(x,y)$! (Formulirajte trditev!)

106. Katero množico v prostoru $\mathbb{R}^3$ imenujemo **notranjost** oz. **rob** gladke elementarne ploskve **?**

107. Katero množico v prostoru $\mathbb{R}^3$ imenujemo odsekoma gladko ploskev ?

108. Katero množico v prostoru $\mathbb{R}^3$ imenujemo gladko ploskev ?

109. Kdaj imenujemo gladko oz. odsekoma gladko ploskev orientabilno?

110. Definicija ploskovnega integrala 1. vrste skalarnega polja u po gladki elementarni in po odsekoma gladki ploskvi ?

111. Razložite, zakaj je ploskovni integral 1. vrste posplošitev dvojnega integrala !

112. Naštejte nekaj primerov uporabe ploskovnega integrala 1. vrste !

113. Definicija ploskovnega integrala 2. vrste vektorskega polja $\vec{v}$ po gladki elementarni orientirani ploskvi ?

114. Razložite, zakaj je ploskovni integral 2. vrste posplošitev dvojnega integrala !

115. Dokažite enakost $\iint_{-\vec{P}} \vec{a}\, d\vec{S} = -\iint_{\vec{P}} \vec{a}\, d\vec{S}$!

116. Preverite oceno $\left|\iint_{\vec{P}} \vec{a}\, d\vec{S}\right| \leq \iint_{P} \left|\vec{a}\right| dS$!

117. Naj bosta funkciji $z_1(x,y)$ in $z_2(x,y)$ zvezno parcialno odvedljivi po obeh spremenljivkah na odprtem območju $\mathcal{D}$ v postoru $\mathbb{R}^2$, naj bo $z_1(x,y) \leq z_2(x,y)$ za vsako točko $(x,y) \in D \subset \mathcal{D}$ in $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}$, kjer je D omejeno konveksno območje v $\mathbb{R}^2$, katerega rob ∂D je enostavna sklenjena gladka krivulja. Skalarno polje $u(x,y,z)$ naj bo zvezno parcialno odvedljivo po vseh spremenljivkah na odprtem območju $\mathcal{G} \supset G$. **Neposredno** iz definicije ploskovnega integrala druge vrste, brez uporabe Gaussovega teorema, **izpeljite** tedaj enakost $\iint\limits_{+\partial G} (u\vec{k})\, d\vec{S} = \iiint\limits_{G} \frac{\partial u}{\partial z}\, dV$, če integrirate po zunanji strani območja G!

118. Dokažite formulo

$$\iint\limits_{\vec{P}} \vec{a}\, d\vec{S} = \pm \iint\limits_{\Delta} \left[\vec{f}_u\,(u,v), \vec{f}_v\,(u,v), \vec{a}\,(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\right] dudv$$

za izračun skalarnega pretoka vektorskega polja $\vec{a}$ skozi orientirano gladko elementarno ploskev $\vec{P}$, ki ima gladko injektivno reprezentacijo (parametrizacijo) $\left(\mathcal{D}, \Delta, \vec{f}\right)$!

119. Skalarni pretok zveznega vektorskega polja $\vec{a}=\vec{a}\ (x,y,z) = a_1(x,y,z)\cdot\ \vec{i}\ + a_2(x,y,z)\cdot\ \vec{j}\ + a_3(x,y,z)\cdot\ \vec{k}$ skozi **zgornjo** stran gladke elementarne orientirane ploskve $\vec{P}$, ki je dana kot graf parcialno zvezno odvedljive funkcije $z : \mathcal{D}^{\text{odp.}} \to \mathbb{R}^3$, je dan s formulo

$$\iint\limits_{\vec{P}} \vec{a}\, d\vec{S} =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left[a_3(x,y,z(x,y)) - a_1(x,y,z(x,y)) \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - a_2(x,y,z(x,y)) \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \right] dxdy,$$

kjer je $P = \{(x,y,z(x,y)) : (x,y) \in \Delta\}$. Preverite to !

120. Naj bodo funkcije $x_1(y,z)$, $x_2(y,z)$, $y_1(x,z)$, $y_2(x,z)$, $z_1(x,y)$ in $z_2(x,y)$ zvezno parcialno odvedljive po vseh spremenljivkah na odprtih območjih $\mathcal{D}_1,\ \mathcal{D}_2$ in $\mathcal{D}_3$ v postoru $\mathbb{R}^2$, naj bodo $D_1,\ D_2$ in D_3 zaprte in omejene množice, ki imajo za svoje robove ∂D_1, ∂D_2 in ∂D_3 enostavne sklenjene in gladke krivulje ter naj bo:

$$\begin{array}{ll} x_1(y,z) \le x_2(y,z) & \text{za vsako točko } (y,z) \in D_1 \subset \mathcal{D}_1 \\ y_1(x,z) \le y_2(x,z) & \text{za vsako točko } (x,z) \in D_2 \subset \mathcal{D}_2 \text{ in} \\ z_1(x,y) \le z_2(x,y) & \text{za vsako točko } (x,y) \in D_3 \subset \mathcal{D}_3. \end{array}$$

Naj bo $G \subset \mathbb{R}^3$ regularno območje,

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D_1,\ x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z)\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D_2,\ y_1(x,z) \le y \le y_2(x,z)\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_3,\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\} \end{aligned}$$

in vektorsko polje $\vec{a}\ (x,y,z) \equiv a_1(x,y,z)\cdot\ \vec{i}\ + a_2(x,y,z)\cdot\ \vec{j}\ + a_3(x,y,z)\cdot\ \vec{k}$ naj bo zvezno parcialno odvedljivo po vseh spremenljivkah na odprtem območju $\mathcal{G} \supset G$. Neposredno, brez uporabe Gaussovega teorema, dokažite, da veljajo tedaj enakosti

$\iint\limits_{+\overrightarrow{\partial G}} (a_1 \vec{i}\,)\, d\vec{S} = \iiint\limits_{G} \frac{\partial a_1}{\partial x}\, dV$, $\qquad \iint\limits_{+\overrightarrow{\partial G}} (a_2 \vec{j}\,)\, d\vec{S} = \iiint\limits_{G} \frac{\partial a_2}{\partial y}\, dV$ $\qquad$ in

$\iint\limits_{+\overrightarrow{\partial G}} (a_3 \vec{k}\,)\, d\vec{S} = \iiint\limits_{G} \frac{\partial a_3}{\partial z}\, dV$ (integrirate po zunanji strani območja G) !

121. Kako se glasi Gaussov divergenčni teorem ?

122. Izpeljite enakost $\iint\limits_{+\overrightarrow{\partial G}} u\, \mathbf{grad}\, v\, d\vec{S} = \iiint\limits_{G} (\mathbf{grad}\, u)\, (\mathbf{grad}\, v)\, dV + \iiint\limits_{G} u\, \Delta v\, dV$ $(\Delta = \vec{\bigtriangledown}\vec{\bigtriangledown})$, če je G območje v $\mathbb{R}^3$ z odsekoma gladkim robom, ki leži v odprtem območju $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ in če je skalarno polje u zvezno parcialno odvedljivo na $\mathcal{G}$ po vseh spremenljivkah ter ima skalarno polje v na $\mathcal{G}$ zvezne vse parcialne odvode do vključno drugega reda !

123. (a) Če označuje $\vec{r}$ krajevni vektor poljubne točke T v prostoru $\mathbb{R}^3$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OT}$, O je koordinatni začetek), pokažite, da je $\mathbf{div}\frac{\vec{r}}{\vec{r}^{\,3}} = 0$ za vsak $\vec{r} \ne \vec{0}$!

(b) Za kroglo K s središčem v koordinatnem začetku O pokažite, da je skalarni pretok $I := \iint_{+\overrightarrow{\partial K}} \frac{\vec{r}\, d\vec{S}}{\vec{r}^{\,3}} = 4\pi$, kjer pomeni $+\partial K$ pozitivno orientiran rob krogle K (površje krogle s poljem zunanjih normal).

(c) Če bi za vektorsko polje $\vec{r} \mapsto \frac{\vec{r}}{\vec{r}^{\,3}}$ uporabili Gaussov divergenčni teorem, bi zaradi (a) dobili za skalarni pretok I tega polja skozi površje ∂K v smeri zunanje normale enakost $I = 0$, kar je v nasprotju z (b). Razložite to navidezno protislovje!

124. Definirajte vektorski pretok $\iint\limits_{\vec{P}} u\, d\vec{S}$ skalarnega polja u skozi orientirano gladko ploskev $\vec{P}$ in volumski integral

$\iiint_G \vec{v}\, dV$ vektorskega polja $\vec{v}$ po območju G ter dokažite enakost $\iint_{+\overrightarrow{\partial G}} u\, d\vec{S} = \iiint_G \mathbf{grad}\, u\, dV$! (Integrirate po zunanji strani površja ∂G.)

125. Formulirajte Stokesov teorem o cirkulaciji !

126. Razložite, zakaj je Stokesov teorem o cirkulaciji posplošitev Greenovega izreka !

127. Če je vektorsko polje $\vec{v}\,(x,y,z)$ zvezno parcialno odvedljivo po vseh svojih spremenljivkah na odprtem območju $G \subset \mathbb{R}^3$ in na G gradientno, je brezvrtinčno, t.j. $\mathbf{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$ na G. Prepričajte se o tem !

128. Če je povezano območje $G \subset \mathbb{R}^3$ odprto in enostavno povezano in je vektorsko polje $\vec{v}$ na G zvezno parcialno odvedljivo po vseh svojih spremenljivkah ter je **rot** $\vec{v} = \vec{0}$ na G, je polje $\vec{v}$ gradientno na G. Preverite to !

129. Ali je vektorsko polje $\vec{a}$ nujno potencialno na odprtem območju $G \subset \mathbb{R}^3$, če je $(\mathbf{rot}\,\vec{a})(x,y,z) = \vec{0}$ za vsako točko $T(x,y,z) \in G$ in so vse komponente P, Q in R polja $\vec{a}\,(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ zvezno parcialno odvedljive po vseh treh spremenljivkah na vsem območju G ? (Odgovor **utemeljite!**)

130. Prepričajte se, da veljata za vektorsko polje $\vec{v}\,(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\vec{j}$ enakosti:

     (a) $\vec{v}\,(x,y,z) = \mathbf{grad}\,\big(arctg\frac{y}{x}\big)$ za vsak $x \neq 0$

     (b) $\Big(\mathbf{rot}\,\vec{v}\Big)(x,y,z) = \vec{0}$ za vsako točko $(x,y) \neq (0,0)$.

     Torej je polje $\vec{v}$ gradientno na območju $\mathbb{R}^3 \setminus (\{0\}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ in brez vrtincev na odprtem povezanem območju G (votel valj), $G = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2+y^2 < 9,\ 0 < z < 2\big\}$. Prepričajte se, da je cirkulacija $\oint_{\vec{K}} \vec{v}\; d\vec{r} = \pm 2\pi$ za vsako enostavno sklenjeno, odsekoma gladko, orientirano krivuljo $\vec{K}$, ki „objame izrezani valj" ! Zakaj je neenakost $\oint_{\vec{K}} \vec{v}\; d\vec{r} \neq 0$ le v navideznem nasprotju z zgornjima točkama (a) in (b) **?**

131. Dokažite, da so diferencialni operatorji **grad, div** in **rot** linearni !

132. Prepričajte se, da veljajo pri določenih predpostavkah (katerih?) enakosti:

     (a) **div(rot**$\vec{a}$**)**$= 0$, **grad div**$\vec{a}$ = **rot rot**$\vec{a} + \Delta\,\vec{a}$

     (b) **grad**$(uv) = u\,$**grad**$v + v\,$**grad**u

     (c) **div**$(u\,\vec{a}) = u\,$**div**$\vec{a} + \vec{a}\,$**grad**u

     (d) **rot**$(u\,\vec{a}) = u\,$**rot**$\vec{a}$ +**grad**$u \times \vec{a}$

     (e) **grad**$(\vec{a}\,\vec{b}) = \vec{a} \times$ **rot**$\vec{b} + \vec{b} \times$ **rot**$\vec{a} + (\vec{a}\,\vec{\nabla})\,\vec{b} + (\vec{b}\,\vec{\nabla})\,\vec{a}$

     (f) **div**$(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}\,$**rot**$\vec{a} - \vec{a}\,$**rot**$\vec{b}$

     (g) **rot**$(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}\,$**div**$\vec{b} - \vec{b}\,$**div**$\vec{a} + (\vec{b}\,\vec{\nabla})\,\vec{a} - (\vec{a}\,\vec{\nabla})\,\vec{b}$.

     Delovanje Laplaceovega operatorja $\Delta = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ na skalarnem in vektorskem polju je definirano takole:

     $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\Delta(a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}) = (\Delta a_1)\,\vec{i} + (\Delta a_2)\,\vec{j} + (\Delta a_3)\,\vec{k}$.

     Delovanje diferencialega operatorja $\vec{b}\,\vec{\nabla} = b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + b_3\frac{\partial}{\partial z}$ na skalarnem in vektorskem polju je definirano z:

     $(\vec{b}\,\vec{\nabla})u = b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + b_3\frac{\partial u}{\partial z}$ in

     $(\vec{b}\,\vec{\nabla})(a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}) = \Big((\vec{b}\,\vec{\nabla})a_1\Big)\,\vec{i} + \Big((\vec{b}\,\vec{\nabla})a_2\Big)\,\vec{j} + \Big((\vec{b}\,\vec{\nabla})a_3\Big)\,\vec{k}$.

133. Razložite pojem rešitve navadne diferencialne enačbe $F(x,y,y',y'') = 0$!

134. Razložite pojma začetnega in robnega problema (Cauchyjeva in Sturm-Liouvilleova naloga) za navadno diferencialno enačbo drugega reda !

135. Razložite pojem začetnega problema za navadno diferencialno enačbo n-tega reda ! Navedite kakšne zadostne pogoje za rešljivost in za enolično rešljivost tega začetnega problema !

136. Kdaj ima začetni problem $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$ pri predpisanih x_0 in y_0 vsaj eno rešitev in kdaj natanko eno (zadostni pogoj) ?

137. Geometrijsko tolmačenje začetnega problema za navadno diferencialno enačbo prvega reda ?

138. Razložite pojem numeričnega reševanja začetnega problema za navadno diferencialno enačbo drugega reda !

139. Izpeljite vsaj en algoritem (Picardov, Eulerjev, „Taylorjev”) za numerično reševanje začetnega problema za navadno diferencialno enačbo prvega reda !

140. Dokažite, da pri poljubni partikularni rešitvi $\widetilde{y}$ navadne linearne diferencialne enačbe drugega reda obstaja za vsako rešitev y te diferencialne enačbe taka rešitev y_h prirejene homogene diferencialne enačbe, da je $y = y_h + \widetilde{y}$!

141. Razložite čemu služi in kako deluje metoda variacije konstante za navadno linearno diferencialno enačbo prvega reda!

142. Kaj je to karakteristični polinom diferencialne enačbe, na katero diferencialno enačbo se nanaša in kakšen je njegov pomen?

143. Opišite in dokažite metodo variacije konstant, s katero lahko poiščemo partikularno rešitev $\tilde{y}$ diferencialne enačbe $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ (p, q, r zvezne funkcije na nekem odprtem intervalu), če sta znani linearno neodvisni rešitvi $\eta_1(x)$ in $\eta_2(x)$ prirejene homogene d.e. !

144. Če imamo znanih n linearno neodvisnih rešitev navadne homogene linearne diferencialne enačbe reda n, ali lahko potem vedno rešimo začetni problem $y(0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ pri poljubnih $y_0, \ldots, y_{n-1}$? (Odgovor utemeljite !)

145. Če imamo znanih n različnih rešitev navadne homogene linearne diferencialne enačbe reda n s konstantnimi koeficienti ali lahko potem vedno rešimo začetni problem $y(0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ pri poljubnih $y_0, \ldots, y_{n-1}$? (Odgovor utemeljite !)

146. Definicija karakterističnega polinoma diferencialne enačbe, na katero diferencialno enačbo se nanaša in kakšen je njegov pomen ?

147. Nihanje (z viskoznim dušenjem) masne točke v smeri abscisne osi okrog koordinatnega začetka popisuje d.e. $x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f(t)$ (β in ω_0 sta dani konstanti, f je dana zvezna funkcija).
Če sta ob času $t = t_0$ vnaprej dani začetna lega $x_0 = x(t_0)$ in začetna hitrost $v_0 = x'(t_0)$, ali je začetni pospešek $a_0 = x''(t_0)$ s tem že enolično določen ali pa je lahko še poljuben ? (Odgovor utemeljite!)

148. Poiščite vsaj eno netrivialno rešitev $u(t,x)$ valovne enačbe $u_{tt} = 4u_{xx}$, ki ustreza robnim pogojem $u(t,0) \equiv u(t,\pi) \equiv 0$!

149. Opišite Fourierjevo metodo reševanja valovne enačbe $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ($c,\ L \in \mathbb{R}^+$) z danimi začetnimi in robnimi pogoji

$$u(0,x) = f_1(x),\ u_t(0,x) = f_2(x),$$
$$u(t,0) = g_1(t), \quad u(t,L) = g_2(t)\ !$$