BII-GIG-MATEMATIKA 3 - izpiski predavanj

Marjeta Kramar Fijavž
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani
Katedra za matematiko in fiziko

27. november 2023

Kazalo

1 Linearni prostori **2**
- 1.1 Linearni prostor in linearni podprostor 2
- 1.2 Linearna neodvisnost, baza, dimenzija 2

2 Linearne preslikave **4**
- 2.1 Definicija in osnovne lastnosti 4
- 2.2 Ničelni prostor, zaloga vrednosti in bijektivnost 4
- 2.3 Linearne preslikave in matrike 5
- 2.4 Lastne vrednosti in lastni vektorji 6

3 Evklidski prostori **7**
- 3.1 Skalarni produkt 7
- 3.2 Ortogonalnost 7
- 3.3 Ortogonalne projekcije 8
- 3.4 Osnovni matrični podprostori 9
- 3.5 Predoločeni sistemi 9

4 Navadne diferencialne enačbe **10**
- 4.1 Ponovitev 10
- 4.2 Linearne diferencialne enačbe višjih redov 10
- 4.3 Sistemi linearnih diferencialnih enačbe 1. reda 12
  - 4.3.1 Dvodimenzionalni sistemi s konstantnimi koeficienti 12
  - 4.3.2 Večdimenzionalni sistemi 13
- 4.4 Robni problemi 14
- 4.5 Fourierove vrste 15

5 Osnovno o parcialnih diferencialnih enačbah **17**
- 5.1 Klasifikacija PDE drugega reda 17
- 5.2 Valovna enačba na premici 17
- 5.3 Toplotna enačba na končnem intervalu 18
- 5.4 Laplaceova enačba 19

6 Osnove teorije grafov **20**
- 6.1 Osnovni pojmi 20
- 6.2 Sprehodi v grafih, povezanost 21
- 6.3 Ravninski grafi 23

1 Linearni prostori

1.1 Linearni prostor in linearni podprostor

(Realen) *linearen prostor* X je neprazna množica, opremljena z operacijama

- seštevanja: za $x, y \in X$ je $x + y \in X$, in
- množenja s skalarji: za $x \in X$ in $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda x \in X$,

ki za vse $x, y, z \in X$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ izpolnjujeta naslednje zahteve:

1. $x + y = y + x$ (komutativnost),
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociatiovnost),
3. $0_X \in X$ (nevtralni element) za katerega velja: $x + 0_X = x$,
4. za vsak x obstaja $-x \in X$ (nasprotni element) tako, da je $x + (-x) = 0_X$,
5. $1x = x$,
6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
8. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

Linearen podprostor

Neprazna podmnožica $Y \subseteq X$ je *linearen podprostor* linearnega prostora X, če velja

(i) za poljubna $y_1, y_2 \in Y$ je $y_1 + y_2 \in Y$, in

(ii) za poljubna $y \in Y$ in $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda y \in Y$,

oziroma, ekvivalentno: za poljubne $y_1, y_2 \in Y$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ je $\lambda y_1 + \mu y_2 \in Y$. Vsak linearen podprostor v X vsebuje 0_X.

Če sta $Y, Z \subseteq X$ linearna podprostora v X, potem sta tudi njun *presek* $Y \cap Z$ in *vsota*

$$Y + Z := \{y + z \mid y \in Y, z \in Z\}$$

linearna podprostora v X. Če je $Y \cap Z = \{0_X\}$, imenujemo vsoto podprostorov Y in Z *direktna vsota* in jo označimo z $Y \oplus Z$.

1.2 Linearna neodvisnost, baza, dimenzija

Naj bo X linearen prostor. *Linearna kombinacija* elementov $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ je vsak izraz oblike

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \text{za } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Linearna ogrinjača ali *linearna lupina* je množica vseh možnih linearnih kombinacij danih elementov:

$$\mathscr{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Množica $M \subseteq X$ *napenja* prostor X, če velja: $\mathscr{L}(M) = X$ (rečemo tudi, da je M *ogrodje* X). Linearen prostor X je *končno razsežen* (ali *končno dimenzionalen*), če obstaja neka končna množica, ki ga napenja. V nasprotnem primeru je X *neskončno razsežen* (ali *neskončno dimenzionalen*).

Elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ so *linearno neodvisni*, če je njihova linearna kombinacija

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_X$$

samo v primeru, ko so vsi koeficienti $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. V nasprotnem primeru so $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *linearno odvisni*; v tem primeru je vsaj eden izmed njih enak linearni kombinaciji preostalih elementov.

Množica $\mathcal{B} \subseteq X$ je *baza* linearnega prostora X, če je linearno neodvisna in napenja X. Vsak končno razsežen linearen prostor ima bazo. Vse njegove baze imajo enako število elementov; to število označimo z $\dim X$ in ga imenujemo *dimenzija* ali *razsežnost* prostora X.

Za vsoto linearnih podprostorov $Y, Z \subseteq X$ velja dimenzijska enačba

$$\dim(Y + Z) = \dim Y + \dim Z - \dim(Y \cap Z).$$

Naj bo $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ urejena baza linearnega prostora X. Potem lahko vsak element $x \in X$ na en sam način zapišemo kot linearno kombinacijo

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Ta zapis imenujemo *razvoj* x po bazi $\mathcal{B}$, ustrezne koeficiente λ_i pa *koordinate* x v bazi $\mathcal{B}$.

2 Linearne preslikave

2.1 Definicija in osnovne lastnosti

Naj bosta X in Y linearna prostora. Preslikava $\mathcal{A}\colon X \to Y$ se imenuje *linearna preslikava*, če za poljubne $x_1, x_2 \in X$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ velja

$$\mathcal{A}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \mathcal{A}(x_1) + \mu \mathcal{A}(x_2),$$

oziroma, ekvivaletno, $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2)$ in $\mathcal{A}(\lambda x_1) = \lambda \mathcal{A}(x_1)$.

Za vsako linearno preslikavo $\mathcal{A}\colon X \to Y$ velja:

- $\mathcal{A}(0_X) = 0_Y$;
- za vse $x_1, \ldots, x_n \in X$ in $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ je
$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{A}(x_i);$$
- če je $U \subseteq X$ linearen podprostor v X, potem je $\mathcal{A}(U) \subseteq Y$ linearen podprostor v Y.

2.2 Ničelni prostor, zaloga vrednosti in bijektivnost

Ničelni prostor ali *jedro* linearne preslikave $\mathcal{A}\colon X \to Y$ je množica

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) := \{x \in X \mid \mathcal{A}(x) = 0_Y\} = \ker(\mathcal{A}).$$

Zaloga vrednosti ali *slika* linearne preslikave $\mathcal{A}\colon X \to Y$ je množica

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) := \{\mathcal{A}(x) \mid x \in X\} = \mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \operatorname{im}(\mathcal{A}).$$

Pri tem veljajo naslednje trditve.

- $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ je linearen podprostor v X in $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ je linearen podprostor v Y.
- $\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}) + \dim \mathcal{R}(\mathcal{A}) = \dim X$.
- Preslikava $\mathcal{A}$ je injektivna $\iff$ $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \{0_X\}$.
- Preslikava $\mathcal{A}$ je surjektivna $\iff$ $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = Y$.
- Če je $\dim X = \dim Y < \infty$, je preslikava $\mathcal{A}$ injektivna $\iff$ surjektivna $\iff$ bijektivna.

Množica vseh linearnih preslikav $\mathcal{L}(X,Y) := \{\mathcal{A}\colon X \to Y \mid \mathcal{A} \text{ linearna }\}$ je linearen prostor z operacijama

- $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$, $x \in X$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(X,Y)$,
- $(\lambda\mathcal{A})(x) = \lambda\mathcal{A}(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Poznamo tudi operacijo *kompozitum preslikav*: za $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(Y,Z)$ je $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Z)$.

Za vsako bijektivno linearno preslikavo $\mathcal{A}\colon X \to Y$ obstaja njej *inverzna preslikava* $\mathcal{A}^{-1}\colon Y \to X$, za katero velja

$$y = \mathcal{A}(x) \iff x = \mathcal{A}^{-1}(y).$$

Tudi $\mathcal{A}^{-1}$ je linearna preslikava in velja:

$$\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A} = \mathcal{I}_X \quad \text{in} \quad \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}_Y,$$

kjer sta $\mathcal{I}_X : X \to X$ in $\mathcal{I}_Y : Y \to Y$ *identični preslikavi*, $\mathcal{I}_X(x) = x$ in $\mathcal{I}_Y(y) = y$.

Če med končno-razsežnima linearnima prostoroma X in Y obstaja bijektivna linearna preslikava, rečemo, da sta X in Y *izomorfna*. V tem primeru je $\dim X = \dim Y$.

2.3 Linearne preslikave in matrike

Naj bosta X in Y končno-razsežna linearna prostora z urejenima bazama $E = (e_1, e_2, \dots e_n)$ in $F = (f_1, f_2, \dots f_m)$. Linearna preslikava $\mathcal{A}: X \to Y$ je enolično določena s poznavanjem koeficientov α_{ij} v zapisu

$$\mathcal{A}(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Te koeficiente uredimo v tabelo, ki jo imenujemo *matrika preslikave $\mathcal{A}$ v bazah E in F*:

$$[\mathcal{A}]_{EF} = [\alpha_{ij}]_{m\times n} := \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

Naj bodo E, F in G po vrsti urejene baze linearnih prostorov X, Y in Z, ter matrike preslikav $\mathcal{A}, \mathcal{B}: X \to Y$, $\mathcal{C}: Z \to X$ in vektor $x \in X$ v teh bazah podani s koeficienti:

$$[\mathcal{A}]_{EF} = [\alpha_{ij}]_{m\times n}, \quad [\mathcal{B}]_{EF} = [\beta_{ij}]_{m\times n}, \quad [\mathcal{C}]_{GE} = [\gamma_{ij}]_{n\times r}, \quad [x]_E = [x_i]_{n\times 1}.$$

Matrične operacije so definirane tako, da ustrezajo operacijam med preslikavami.

1. Vsota:

$$[\mathcal{A} + \mathcal{B}]_{EF} = [\mathcal{A}]_{EF} + [\mathcal{B}]_{EF} = [\alpha_{ij}]_{m\times n} + [\beta_{ij}]_{m\times n} = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]_{m\times n}.$$

2. Produkt s skalarjem $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$[\lambda \cdot \mathcal{A}]_{EF} = \lambda \cdot [\mathcal{A}]_{EF} = \lambda \cdot [\alpha_{ij}]_{m\times n} = [\lambda \cdot \alpha_{ij}]_{m\times n}.$$

3. Kompozitum presikav $\mathcal{A} \circ \mathcal{C}: Z \to Y$ ustreza produktu matrik:

$$[\mathcal{A} \circ \mathcal{C}]_{GF} = [\mathcal{A}]_{EF} \cdot [\mathcal{C}]_{GE} = [\alpha_{ij}]_{m\times n} \cdot [\gamma_{ij}]_{n\times r} = \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \cdot \gamma_{kj} \right]_{m\times r}.$$

4. Delovanje preslikave $\mathcal{A}$ na vektorju x dobimo s produktom:

$$[\mathcal{A}(x)]_F = [\mathcal{A}]_{EF} \cdot [x]_E = [\alpha_{ij}]_{m\times n} \cdot [x_i]_{n\times 1} = \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \cdot x_k \right]_{m\times 1}.$$

Zamenjava baze

Če so: E in E' urejeni bazi linearnega prostora X, F in F' urejeni bazi linearnega prostora Y ter $\mathcal{A}\colon X \to Y$ linearna preslikava, potem velja naslednja zveza med matrikami:

$$[\mathcal{A}]_{E'F'} = P_{FF'} \cdot [\mathcal{A}]_{EF} \cdot P_{E'E},$$

pri čemer sta $P_{FF'}$ in $P_{E'E}$ *prehodni matriki* med ustreznima bazama. Dobimo ju kot matriki identičnih preslikav $\mathcal{I}_Y : Y \to Y$ in $\mathcal{I}_X : X \to X$ v danih bazah:

$$P_{FF'} = [\mathcal{I}_Y]_{FF'} = P_{F'F}^{-1} \quad \text{in} \quad P_{E'E} = [\mathcal{I}_X]_{E'E} = P_{EE'}^{-1}.$$

Kvadratni matriki A in B imenujemo *podobni*, če obstaja takšna obrnljiva matrika P, da je $B = P^{-1}AP$. Podobni matriki sta matriki iste linearne preslikave $\mathcal{A}\colon X \to X$ v različnih bazah.

2.4 Lastne vrednosti in lastni vektorji

Število $\lambda \in \mathbb{R}$ imenujemo (realna) *lastna vrednost* linearne preslikave $\mathcal{A}\colon X \to X$, če obstaja tak neničelni $x \in X$, da je $\mathcal{A}(x) = \lambda x$. V tem primeru imenujemo x *lastni verktor* preslikave $\mathcal{A}$ za lastno vrednost λ. Množico lastnih vrednosti imenujemo *spekter* preslikave in jo označimo s $\sigma(\mathcal{A})$, linearen prostor

$$\mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) := \{x \in X \mid \mathcal{A}(x) = \lambda x\}$$

pa *lastni podprostor* preslikave $\mathcal{A}$ za lastno vrednost λ.

Velja: λ je lastna vrednost preslikave $\mathcal{A} \iff \mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) \neq \{0_X\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$, kjer je A matrika preslikave $\mathcal{A}$ v poljubni bazi.

Preslikavi $\mathcal{A}\colon X \to X$ v bazi E pripada diagonalna matrika natanko tedaj, ko E sestavljajo lastni vektorji preslikave $\mathcal{A}$. V tem primeru za matriko A preslikave $\mathcal{A}$ v poljubni bazi velja

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{1}$$

kjer so $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti preslikave $\mathcal{A}$ (in matrike A) ter prehodno matriko P sestavljajo ustrezni lastni vektorji.

Vsaka matrika ni podobna doagonalni matriki, vedno pa je podobna neki trikotni matriki, ki ima po diagonali lastne vrednosti (Shurov izrek).

Matrična eksponentna funkcija je definirana kot

$$\exp(A) = e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Če matriko A lahko diagonaliziramo kot v (1), potem je

$$e^A = P \cdot e^D \cdot P^{-1}, \text{ kjer je } e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

3 Evklidski prostori

3.1 Skalarni produkt

Skalarni produkt na linearnem prostoru X je preslikava $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{R}$, ki paru (x, y) priredi število $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$, za katero velja:

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,

(ii) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ in $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0_X$,

za vse $x, y, z \in X$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Linearen prostor X s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ imenujemo *evklidski prostor*.

Evklidska norma

Naj bo X evklidski prostor s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Evklidska norma* (ali dolžina) elementa $x \in X$ je definirana kot

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Za poljubne $x, y \in X$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ velja:

(i) $\|x\| \geq 0$ in $\|x\| = 0 \iff x = 0_X$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ in $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff y = \lambda x$ za nek $\lambda > 0$ (trikotniška nenenakost),

(iv) $\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|$ in $\|\langle x, y\rangle\| = \|x\|\|y\| \iff y = \lambda x$ za nek $\lambda \in \mathbb{R}$ (neenakost Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz).

Razdalja

Razdalja med elementoma $x, y \in X$ je definirana kot

$$\mathrm{d}(x, y) := \|x - y\|.$$

Pri tem za poljubne $x, y, z \in X$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ velja:

(i) $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$ in $\mathrm{d}(x, y) = 0 \iff x = y$,

(ii) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$,

(iii) $\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$.

3.2 Ortogonalnost

Naj bo X evklidski prostor s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Kot* med poljubnima neničelnima elementoma $x, y \in X$ je tako število $\varphi \in [0, \pi]$, za katerega je $\cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$. Elementa $x, y \in X$ sta *ortogonalna* ($x \perp y$), če je $\langle x, y\rangle = 0$.

$M \subseteq X$ je *ortogonalna množica*, če sta poljubna dva različna elementa iz M ortogonalna. $M \subseteq X$ je *normirana množica*, če je $\|x\| = 1$ za vse $x \in M$. $M \subseteq X$ je *ortonormirana množica*, če je ortogonalna in normirana.

Za ortogonalno množico $\{x_1, \ldots, x_n\}$ velja naslednje.

(i) Elementi $x_1, \ldots, x_n$ so linearno neodvisni.

(ii) Za poljubne $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ velja posplošen Pitagorov izrek:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i x_i\|^2$$

Fourierov razvoj

Če je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonorminana množica, lahko vsak $x \in \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_n\}$ izrazimo kot

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Ta zapis imenujemo *Fourierov razvoj* in koeficiente $\langle x, e_i \rangle$ *Fourierovi koeficienti* elementa x glede na dano ortonormirano množico.

Gramm-Schmidtov postopek

Pri danih linearno neodvisnih elementih $a_1, \ldots a_n$ evklidskega prostora X dobimo ortonormirano bazo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ podprostora $\mathcal{L}\{a_1, \ldots, a_n\}$ s pomočjo *Gramm-Schmidtovega postopka*:

$$b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle a_k, e_i \rangle e_i, \quad e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Zato ima vsak končnorazsežen evklidski prostor ortonormirano bazo.

3.3 Ortogonalne projekcije

Naj bo X evklidski prostor s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Za poljubno podmnožico $M \subseteq X$ definiramo *ortogonalni komplement* kot

$$M^\perp := \{x \in X \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ za vse } y \in M\}.$$

Za poljuben linearen podprostor $Y \subseteq X$ velja naslednje.

1. $Y^\perp$ je linearen podprostor X.
2. $Y \cap Y^\perp = \{0_X\}$.
3. $\left(Y^\perp\right)^\perp = Y$.
4. $X = Y \oplus Y^\perp$ (direktna ortogonalna vsota podprostorov).
5. $\dim \left(Y^\perp\right) = \dim X - \dim Y$.

Zato lahko poljuben $x \in X$ enolično zapišemo kot

$$x = y_x + z_x, \quad y_x \in Y, z_x \in Y^\perp.$$

Element y_x imenujemo *ortogonalna projekcija x na podprostor Y* in velja

$$y_x = \mathrm{proj}_Y x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i,$$

kjer je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ neka ortonormirana baza Y. *Razdalja elementa $x \in X$ do prostora Y* je enaka

$$\mathrm{d}(x, Y) = \mathrm{d}(x, y_x) = \|x - y_x\|.$$

3.4 Osnovni matrični podprostori

Matrika $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ določa linearno preslikavo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s predpisom $x \mapsto Ax$. Zalogo vrednosti te preslikave imenujemo *stolpčni prostor matrike* A:

$$\mathcal{C}(A) := \mathcal{R}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \mathcal{L}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} \subseteq \mathbb{R}^m,$$

in *ničelni prostor matrike* A je

$$\mathcal{N}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Vrstični prostor matrike A je enak

$$\mathcal{C}(A^\top) := \mathcal{R}(A^\top) = \mathcal{N}(A)^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$$

in velja tudi

$$\mathcal{N}(A^\top) = \mathcal{R}(A)^\perp \subseteq \mathbb{R}^m$$

Rang matrike A je enak

$$r = r(A) := \dim\, \mathcal{C}(A) = \dim\, \mathcal{C}(A^\top)$$

in po dimenzijski enačbi je

$$\dim\, \mathcal{N}(A) = n - r \quad \text{in} \quad \dim\, \mathcal{N}(A^\top) = m - r.$$

3.5 Predoločeni sistemi

Normalna enačba

Naj bo $m > n$. Za poljubno matriko $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ in poljuben stolpec $b \in \mathbb{R}^m$ je *normalna enačba*

$$A^\top A x = A^\top b$$

vedno rešljiva in njena rešitev x^* je najboljša aproksimacija rešitve sistema $Ax = b$ (to je vektor, ki po metodi najmanjših kvadratov sistemu najbolje ustreza):

$$\|Ax^* - b\| = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|.$$

QR-razcep

Naj bo $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$, $m > n$ in $r(A) = n$. Potem obstaja enoličen razcep $A = QR$ pri katerem je:

(i) $Q \in \mathbb{R}_{m\times n}$ ortonormirana matrika (to je $Q^\top Q = I$) in

(ii) $R \in \mathbb{R}_{n\times n}$ zgornje trikotna matrika s pozitivnimi diagonalnimi elementi.

QR-razcep matrike se uporablja pri reševanju navadnih in predoločenih sistemov linearnih enačb, pri numeričnem računanju lastnih vrednosti, itd.

4 Navadne diferencialne enačbe

4.1 Ponovitev

Diferencialna enačba je enačba, ki povezuje neznano funkcijo in njene odvode. *Rešitev* diferencialne enačbe je funkcija, ki to enačbo identično izpolni. Množica vseh rešitev diferencialne enačbe se imenuje *splošna rešitev* diferencialne enačbe. Ločimo:

- *navadne diferencialne enačbe*, kjer nastopa le ena neodvisna spremenljivka in navadni odvodi, rešitev je funkcija ene spremeljivke;
- *parcialne diferencialne enačbe*, kjer je neodvisnih spremenljivk več, vsebuje parcialne odvode, rešitev je funkcija več spremeljivk.

Red diferencialne enačbe je red najvišjega odvoda, ki nastopa v enačbi.

Obstoj in enoličnost rešitve

Začetni problem ali Cauchyjeva naloga imenujemo diferencialno enačbo skupaj z začetnim pogojem:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Izrek 1 (Lokalni eksistenčni izrek)**.** *Če je f zvezna na območju $D \subseteq \mathbb{R}^2$, potem obstaja vsaj ena rešitev začetnega problema* (2) *za $(x_0, y_0) \in D$. Če je na D zvezna tudi funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}$, potem ima za vsak $(x_0, y_0) \in D$ začetni problem* (2) *eno samo rešitev na D.*

Linearna diferencialna enačba 1. reda

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \tag{3}$$

kjer sta p in q zvezni funkciji na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Rešitev enačbe je oblike

$$y = y_H + y_P,$$

kjer je y_H splošna rešitev *prirejene homogene enačbe*

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0 \tag{4}$$

in y_P *partikularna ali delna rešitev* enačbe (3). Enačba (4) ima ločljive spremenljivke in rešitev oblike

$$y_H(x) = C\mathrm{e}^{P(x)}, \quad P(x) = -\int p(x)\,dx,\ C \in \mathbb{R},$$

medtem ko y_P bodisi uganemo bodisi uporabimo *metodo variacije parametrov (konstant)* kjer rešitev iščemo z nastavkom $y_P(x) = C(x)\mathrm{e}^{P(x)}$.

4.2 Linearne diferencialne enačbe višjih redov

Na prostoru n-krat zvezno odvedljivih funkcij na nekem intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ definiramo linearno preslikavo L s predpisom

$$L(y) := y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y, \tag{5}$$

kjer so $a_1, \ldots, a_n$ dane zvezne funkcije na I. Ničelni prostor linearne preslikave L sestavljajo rešitve *homogene linearne diferencialne enačbe reda n*:

$$L(y) = 0. \tag{6}$$

Rešitve $y_1, y_2, \ldots, y_n$ enačbe (6) so linearno neodvisne natanko tedaj, ko za *determinanto Wronskega* velja

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x) := \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ za vse } x \in I.$$

Za neko dano zvezno funkcijo b na I ima nehomogena *linearna diferencialna enačba reda n*

$$L(y) = b(x) \tag{7}$$

splošno rešitev oblike

$$y = y_H + y_P,$$

kjer je y_H splošna rešitev prirejene homogene enačbe (6), ki je linearna kombinacija n linearno neodvisnih rešitev $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

y_P pa je neka *partikularna ali delna rešitev* enačbe (7).

Lokalni eksistenčni izrek

Če so $a_1, \ldots, a_n$ in b zvezne funkcije na I, ima enačba $L(y) = b$ za vsak $x_0 \in I$ natanko eno rešitev, ki ustreza *začetnim pogojem*

$$y(x_0) = k_1, \quad y'(x_0) = k_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = k_n$$

za neke $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$.

Metoda variacije parametrov (konstant) za enačbe 2. reda

Nehomogena linearna diferencialna enačba 2. reda je oblike

$$y'' + a_2(x)y' + a_2(x)y = b(x), \tag{8}$$

kjer so a_2, a_2 in b dane zvezne funkcije na $I \subseteq \mathbb{R}$. Če sta y_1 in y_2 linerno neodvisni rešitvi enačbi (8) prirejene homogene enačbe (tj. za $b(x) = 0$), potem je

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$$

partikularna rešitev nehomogene enačbe (8), kjer sta funkciji $A(x)$ in $B(x)$ rešitvi sistema

$$\begin{aligned} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) &= 0 \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) &= b(x). \end{aligned}$$

Linearne diferencialne enačbe n-tega reda s konstantnimi koeficienti

Rešitve homogene enačbe

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y'(x) + a_n y(x) = 0, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

dobimo s pomočjo ničel karakterističnega polinoma:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{9}$$

1. Če je λ k-kratna ničla karakterističnega polinoma, so linearno neodvisne rešitve homogene enačbe oblike
$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x}, \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

2. Če je $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ k-kratna konjugirano kompleksna ničla karakterističnega polinoma, so linearno neodvisne rešitve homogene enačbe oblike
$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Partikularno rešitev y_p nehomogene enačbe z desno stranjo $b(x)$ lahko poiščemo z *metodo nedoločenih koeficientov*:

1. Če je $b(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$ za nek polinom P_m stopnje m, potem uporabimo nastavek
$$y_p(x) = x^r e^{\lambda x} Q_m(x),$$
kjer je Q_m polinom stopnje m in r red ničle λ karakterističnega polinoma (9) (če λ ni ničla, je $r = 0$).

2. Če je $b(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + R_n(x)\sin\beta x\right)$, za neka polinoma P_m stopnje m in R_n stopnje n, potem uporabimo nastavek
$$y_P(x) = x^r e^{\alpha x}\left(Q_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x\right),$$
kjer sta Q_N in S_N polinoma stopnje $N = \max\{m, n\}$ in je r red ničle $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ karakterističnega polinoma (9) (če λ ni ničla, je $r = 0$).

4.3 Sistemi linearnih diferencialnih enačbe 1. reda

4.3.1 Dvodimenzionalni sistemi s konstantnimi koeficienti

Homogen sistem dveh linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ za funkciji $x = x(t)$, $y = y(t)$ je oblike
$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Rešitve sistema lahko ponazorimo na dva načina:

- s *časovnim diagramom*, kjer v isti koordinatini sistem narišemo grafa funkcij $x = x(t)$, $y = y(t)$, tj. rešitev sistema;
- s *faznim diagramom*, kjer v (x, y)-koordinatnem sistemu narišemo krivuljo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, ki jo imenujemo *orbita* ali *trajektorija rešitve*.

Obnašanje rešitev in obliko orbit v faznem diagramu določajo ničle karakterističnega polinoma λ_1, λ_2, ki so enake lastnim vrednostim matrike A:
$$\lambda^2 - \underbrace{(a + d)}_{=\mathrm{sl}(A)}\lambda + \underbrace{(ad - bc)}_{=\det(A)} = \det(A - \lambda I).$$

Denimo, da je $\det(A) \neq 0$ (tj. sistem je enolično rešljiv). Potem imamo naslednje štiri možnosti.

(i) Če je $0 \leq \det(A) \leq \frac{1}{4}(\mathrm{sl}(A))^2$ sta $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ in je $(0,0)$ *vozel*, ki je v primeru $\mathrm{sl}(A) < 0$ stabilen (orbite so usmerjene navznoter) ter v primeru $\mathrm{sl}(A) > 0$ nestabilen (orbite so usmerjene navzven).

(ii) Če je $\det(A) < 0$ sta $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ različno predznačeni, zato je $(0,0)$ *sedlo*.

(iii) Če je $\det(A) > 0$ in $\mathrm{sl}(A) = 0$, sta $\lambda_1, \lambda_2 = \pm \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$ in so orbite *elipse* s središčem $(0,0)$. Rešitev je torej periodična.

(iv) Če je $\det(A) > \frac{1}{4}(\mathrm{sl}(A))^2 \neq 0$, sta $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$ in so orbite *spirale* s središčem $(0,0)$. V primeru $\alpha < 0$ je izhodišče stabilno (orbite so usmerjene navznoter) ter v primeru $\alpha > 0$ nestabilno (orbite so usmerjene navzven).

4.3.2 Večdimenzionalni sistemi

Sistem n linearnih diferencialnih enačb 1. reda za funkcije $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, je oblike

$$\begin{array}{rlr} x_1' = & a_{11}(t)\,x_1 + \cdots + a_{1n}(t)\,x_n(t) + & b_1(t) \\ x_2' = & a_{21}(t)\,x_1 + \cdots + a_{2n}(t)\,x_n(t) + & b_2(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n' = & a_{n1}(t)\,x_1 + \cdots + a_{nn}(t)\,x_n(t) + & b_n(t) \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \qquad (11)$$

kjer so $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ dane zvezne funkcije na I ter

$$X(t) := (x_i(t))_{1\leq i\leq n}\,, \quad A(t) := (a_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}\,, \quad B(t) := (b_i(t))_{1\leq i\leq n}\,.$$

Izrek 2 (Lokalni eksistenčni izrek)**.** *Če so $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ zvezne funkcije na I in $t_0 \in I$, potem ima začetni problem*

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

na I natanko eno rešitev.

Če je $B(t) = 0$, imenujemo sistem *homogen*. Splošna rešitev homogenega sistema je oblike

$$X_H(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) + \cdots + C_nX_n(t), \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

kjer so rešitve $X_1, X_2, \ldots, X_n$ linearno neodvisne natanko tedaj, ko je determinanta Wronskega $\det[X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)] \neq 0$ za vse $t \in I$. Splošna rešitev nehomogenega sistema pa je enaka

$$X = X_H + X_P,$$

kjer je X_P je neka *partikularna ali delna rešitev* sistema (11).

Homogeni sistemi s konstantnimi koeficienti

Sistem $X'(t) = A \cdot X(t)$, kjer je $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ matrika s konstantnimi koefcienti, lahko rešimo na več načinov.

1. S prevedbo na linearno diferencialno enačbo reda n s konstantnimi koeficienti.

2. Z uporabo matrične eksponentne funkcije: $X(t) = e^{tA}v$, kjer je v nek konstanten vektor.

3. S pomočjo lastnih vrednosti ter lastnih vektorjev matrike A:

- Za lastni vektor v_i, ki pripada lastni vrednosti λ_i, je $X_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i t} v_i$ rešitev sistema.
- Različnim lastnim vrednostim matrike pripadajo linearno neodvisni lastni vektorji in tako dobimo linearno neodvisne rešitve.
- V primeru, ko je λ k-kratna realna ničla karakterističnega polinoma, pri kateri ne moremo dobiti k linearno neodvisnih lastnih vektorjev, poiščemo *korenske vektorje* w_i matrike A, ki pripadajo lastni vrednosti λ:
$$w_1 = v, \quad (A - \lambda I)w_i = w_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, k,$$
in z njimi tvorimo k linearno neodvisnih rešitev oblike
$$X_i(t) = \left(w_k + t w_{k-1} + \frac{t^2}{2!} w_{k-2} + \cdots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} w_i \right) \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad i = 1, \ldots, k.$$
- Če sta $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ konjugirani kompleksni ničli karakterističnega polinoma, poiščemo ustrezna kompleksna lastna vektorja $w \pm \mathrm{i}z$ in z uporabo Eulerjeve formule dobimo realni linearno neodvisni rešitvi oblike
$$\begin{aligned} X_1(t) &= \mathrm{e}^{\alpha t}(w \cos \beta t - z \sin \beta t) \\ X_2(t) &= \mathrm{e}^{\alpha t}(w \sin \beta t + z \cos \beta t). \end{aligned}$$
- V primeru večkratne kompleksne lastne vrednosti si pomagamo z ustreznimi kompleksnimi lastnimi vektorji.

4.4 Robni problemi

Robni problem imenujemo diferencialno enačbo na nekem zaprtem intervalu $I \subset \mathbb{R}$ skupaj z robnimi pogoji, to je predpisanim obnašanjem rešitvene funkcije v krajiščih intervala I. Za razliko od začetnega problema, robni problem linearne diferencialne enačbe nima vedno (enolične) rešitve.

Za linearno diferencialno enačbo drugega reda
$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad x \in I := [x_1, x_2] \subset \mathbb{R},$$
imamo robne pogoje oblike
$$\begin{aligned} \alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) &= \gamma_1, \\ \alpha_2 y(x_2) + \beta_2 y'(x_2) &= \gamma_2, \end{aligned}$$
pri čemer $\alpha_1 \cdot \beta_1 \neq 0$ in $\alpha_2 \cdot \beta_2 \neq 0$. Robni problem imenujemo *homogen*, če je $f(x) = 0$ in $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Nehomogene robne probleme (s homogenimi robnimi pogoji) rešujemo s pomočjo lastnih funkcij problema, to je lastnih funkcij linearne preslikave
$$L(y) := y'' + a(x)y' + b(x)y,$$
ki zadoščajo homogenim robnim pogojem (t.i. *Sturm-Liouvillov robni problem*). Označimo lastne funkcije problema z y_k: $L(y_k) = \lambda_k \cdot y_k$ za neke $\lambda_k \neq 0$. Če je $f(x) = \sum_k \mu_k y_k$, potem je rešitev nehomogenega problema enaka
$$y(x) = \sum_k \frac{\mu_k}{\lambda_k} y_k.$$
V primeru neskončne vsote dobimo *Fourierove vrste*.

4.5 Fourierove vrste

Funkcije na $[-\pi, \pi]$

Prostor

$$\mathrm{L}^2[-\pi,\pi] := \left\{ f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

je Evklidski prostor s skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx.$$

Prostor $\mathrm{L}^2[-\pi,\pi]$ je neskončno razsežen, med drugim vsebuje vse odsekoma zvezne funkcije na $[-\pi,\pi]$, z ortonormirano bazo

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(kx), \sin(kx) \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zato lahko vsako funkcijo $f \in \mathrm{L}^2[-\pi,\pi]$ razvijemo v *Fourierovo vrsto*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right),$$

kjer *Fourierove koeficiente* izračunamo po formulah

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Splošne periodične funkcije

Naj bo funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična s periodo $P > 0$: $f(x+P) = f(x)$ in integrabilna na $[a,b]$, kjer je $b - a = P$. *Fourierova vrsta* za f na $[a,b]$ je enaka

$$F(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{P}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{P}\right) \right),$$

kjer *Fourierove koeficiente* izračunamo po formulah

$$a_k = \frac{2}{P} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2k\pi x}{P}\right) \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_k = \frac{2}{P} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2k\pi x}{P}\right) \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Izrek 3. *Če za funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ velja:*

(i) f je periodična s periodo $P > 0$,

(ii) f je odsekoma zvezna na $[a,b]$, kjer je $b - a = P$,

(iii) f ima v x levi in desni odvod,

potem je Fourierova vrsta za f konvergentna v x in velja

$$F(x) = \frac{f_-(x) + f_+(x)}{2}$$

($f_-(x)$ oz. $f_+(x)$ označuje levo oz. desno limito f v točki x).

Razvoj po sinusih oziroma po kosinusih

Funkcijo f, definirano na intervalu $[0, c]$, razvijemo po $2c$-periodičnih fukcijah na dva načina.

1. Liha razširitev: $f(-x) = -f(x)$, $0 < x \le c$, zato je Fourierova vrsta le *razvoj po sinusih*

$$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{c}\right), \quad b_k = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{c}\right)\,dx.$$

2. Soda razširitev: $f(-x) = f(x)$, $0 < x \le c$, zato je Fourierova vrsta le *razvoj po kosinusih*

$$F(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{c}\right), \quad a_k = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{c}\right)\,dx.$$

5 Osnovno o parcialnih diferencialnih enačbah

Parcialna diferencialna enačba (ali PDE) povezuje neznano funkcijo več spremenljivk in njene parcialne odvode. *Red PDE* je red najvišjega parcialnega odvoda, ki nastopa v enačbi. PDE je *linearna* če funkcija in vsi njeni parcialni odvodi v enačbi nastopajo linearno.

Začetni oz. robni problem je PDE skupaj z začetnimi oz. robnimi pogoji. Problem je *korektno zastavljen* (ali dobro pogojen), če obstaja enolična rešitev, ki je stabilna (majhna sprememba pogojev povzroči le majhno spremembo rešitve).

Omejimo se na linearne PDE drugega reda za funkcije dveh spremenljivk $u = u(x, y)$.

5.1 Klasifikacija PDE drugega reda

Splošna oblika linearne PDE drugega reda za $u = u(x, y)$ je

$$L(u) := \underbrace{a \cdot u_{xx} + 2b \cdot u_{xy} + c \cdot u_{yy}}_{=:L_0(u)} + \underbrace{d \cdot u_x + e \cdot u_y + f \cdot u}_{=:\ell_1(u)} = g, \tag{12}$$

kjer so a, b, c, d, e, f, g dane funkcije spremenljivk x in y. $L_0(u)$ imenujemo *glavni del enačbe* in določa glavne lastnosti rešitev. Definirajmo

$$\delta(L) := b^2(x, y) - a(x, y) \cdot c(x, y).$$

Enačba (12) je v točki (x, y)

- *hiperbolična*, če je $\delta(L)(x, y) > 0$,
- *parabolična*, če je $\delta(L)(x, y) = 0$,
- *eliptična*, če je $\delta(L)(x, y) < 0$.

Z ustrezno zamenjavo spremenljivk $(\xi, \eta) = (\xi(x, y), \eta(x, y))$, lahko vsako linearno PDE 2. reda prevedemo na *kanonsko obliko*, ki je enaka eni od naslednjih treh:

- $w_{\xi\eta} + \ell_1(w) = G(\xi, \eta)$ za hiperbolično enačbo,
- $w_{\xi\xi} + \ell_1(w) = G(\xi, \eta)$ za parabolično enačbo,
- $w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + \ell_1(w) = G(\xi, \eta)$ za eliptično enačbo.

5.2 Valovna enačba na premici

Homogena valovna enačba na premici je oblike

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

kjer je c valovna hitrost. Enačba je hiperbolična, na kanonsko obliko $w_{\xi\eta} = 0$ jo lahko prevedemo z uporabo spremeljivk $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$. Odtod dobimo splošno rešitev enačbe kot vsoto prihajajočega in odhjajočega vala:

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Premice $x \pm ct = k$ ($k \in \mathbb{R}$) v (x, y)-ravnini, vzdolž katerih se prenašajo lastnosti rešitev, imenujemo *karakteristike*.

Rešitev začetnega problema (ali Cauchyjeve naloge)

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{13}$$

nam da *d'Alembertova formula*

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds.$$

Izrek 4. *Fiksirajmo $T > 0$. Če je f dvakrat zvezno odvedljiva in g enkrat zvezno odvedljiva funkcija, je začetni problem* (13) *za vsak $x \in \mathbb{R}$ in $t \in [0,T]$ korektno zastavljen.*

5.3 Toplotna enačba na končnem intervalu

Toplotna enačba je primer parabolične enačbe.

Obravnavamo začetno-robni problem

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0 \text{ (\textit{Dirichletovi robni pogoji})}, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \text{ (začetni pogoj)}, \end{cases} \tag{14}$$

kjer je $k > 0$ koeficient prevajanja toplote in L dolžina intervala. Pogoji morajo biti konsistentni: $f(0) = 0 = f(L)$.

Problem rešujemo s *Fourierovo metodo ločevanja spremenljivk*:

1. Pišemo $u(x,t) = X(x)T(t)$ in PDE preoblikujemo v sistem navadnih diferencianih enačb.
2. Z uporabo robnih pogojev rešimo lastni problem in dobimo lastne vrednosti λ_n, lastne funkcije $X_n(x)$ ter ustrezne rešitve $T_n(t)$.
3. Sestavimo splošno rešitev v obliki vrste

   $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) T_n(t)$$

   in s pomočjo začetnega pogoja in Fourierovega razvoja določimo koeficiente c_n.

Za problem (14) na ta način dobimo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},$$

B_n pa so Fourierovi koeficienti razvoja f po sinusih na intervalu $[0,L]$.

Opombe.

1. Če v enačbi (14) namesto Dirichletovih vzamemo *Neumannove robne pogoje*

   $$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

   je postopek podoben, potreben je Fourierov razvoj f po kosinusih na intervalu $[0,L]$.

2. S pomočjo Fourierove metode ločevanja spremenljivk lahko obravnavamo tudi valovno enačbo na končnem intervalu.

3. Rešitev toplotne enačbe na premici

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

je *Gaussov integral*

$$u(x,t) = \frac{1}{2k\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4k^2 t}}\, ds.$$

5.4 Laplaceova enačba

Laplaceova enačba je eliptična enačba oblike

$$\triangle u = 0, \tag{15}$$

kjer je $\triangle u = \nabla \cdot \nabla u = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u))$ Laplaceov operator. Rešitve enačbe (15) imenujemo *harmonične funkcije*. Enačbo rešujemo na danem zaprtem območju D in na robu ∂D predpišemo robne pogoje, npr.,

- *Dirichletove pogoje*: $u|_{\partial D} = f$,
- *Neumannove pogoje*: $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = f$,
- *Robinove pogoje*: $\left(u + c \cdot \frac{\partial u}{\partial n}\right)|_{\partial D} = f$.

Pri reševanju lahko uporabimo Fourierovo metodo ločevanja spremenljivk.

Laplaceova enačba v sfernih koordinatah

V sfernih koordinatah ($x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$) je Laplaceov operator enak

$$\triangle u = u_{rr} + \frac{2}{r} \cdot u_r + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \cdot u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2} \cdot u_{\vartheta\vartheta} + \frac{\cot\vartheta}{r^2} \cdot u_\vartheta.$$

Obravnavamo le posebni primer, ko $u_\varphi = 0$. Robni problem za funkcijo $u = u(r,\vartheta)$ z Dirichletovimi robnimi pogoji:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r} \cdot u_r + \frac{1}{r^2} \cdot u_{\vartheta\vartheta} + \frac{\cot\vartheta}{r^2} \cdot u_\vartheta = 0, & 0 < r < c, 0 < \vartheta < \pi, \\ u(c,\vartheta) = f(\vartheta), & 0 < \vartheta < \pi. \end{cases}$$

Iščemo rešitve, ki so omejene v $r = 0$. Po Fourierovi metodi z nastavkom $u(r,\vartheta) = R(r)\theta(\vartheta)$ dobimo 2 navadni diferencialni enačbi: *Cauchy-Eulerjevo enačbo* za $R(r)$ in *Legendrovo enačbo* za $\theta(\cos\vartheta)$. Rešimo vsako posebej, upoštevamo pogoj omejenosti in skupaj dobimo splošno rešitev oblike

$$u(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\vartheta),$$

kjer so P_n *Legendrovi polinomi*. Legendrovi polinomi so ortogonalni glede na skalarni produkt $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt$. Z upoštevanjem robnega pogoja tako lahko določimo koeficiente A_n s Fourierovimi razvojem dane funkcije f po ortonormirani bazi iz Legendrovih polinomov:

$$A_n = \frac{2n+1}{2c^n} \int_0^{\pi} f(\vartheta) P_n(\cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

6 Osnove teorije grafov

6.1 Osnovni pojmi

Graf je urejen par $G = (V, E)$, kjer je

- $V = V(G)$ neprazna končna množica *vozlišč ali točk* grafa G
- $E = E(G)$ množica *povezav* grafa G, pri čemer je vsaka povezava *par* vozlišč

Pisava: Namesto $e = \{u, v\}$ pišemo krajše $e = uv$ ali $e = vu$. V tem primeru pravimo, da sta točki u in v *krajišči* povezave e. Pravimo tudi, da sta u in v *sosednji*, kar označimo z $u \sim v$.

Enostaven graf je graf brez zank in vzporednih povezav. *Usmerjen graf* ali *omrežje* je graf, v katerem so povezave usmerjene: $e = (u, v)$ in $uv \neq vu$.

Stopnja točke $v \in V(G)$ je število povezav, ki imajo v za krajišče. Stopnjo točke v označimo z $\deg(v)$. Točka stopnje 0 je *izolirana točka*, točki stopnje 1 pa *list* grafa. Graf G je *d-regularen*, če so vsa vozlišča grafa G stopnje d. 3-regularnim grafom pravimo tudi *kubični grafi*.

Lema 1 (Lema o parnosti)**.** *Naj bo G graf z n točkami in m povezavami. Potem je*

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2 \cdot m$$

Posledica 1. *V vsakem grafu je sodo mnogo točk lihe stopnje.*

Osnovne družine grafov

- **Polni grafi.** Graf je *poln*, če sta vsaki njegovi točki sosedi. Poln graf na n točkah označimo s K_n.

  $V(K_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $\qquad |V(K_n)| = n$
  $E(K_n) = \{v_i v_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ $\qquad |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$
  $\deg(v_i) = n - 1$ $\qquad K_n$ je $(n-1)$-regularen graf.

- **Polni dvodelni grafi.** $K_{m,n}$ je *polni dvodelni graf* na $n + m$ točkah. Vsebuje dva *barvna razreda* s po n in m točkami, točki sta sosedi natanko tedaj, ko sta v različnih barvnih razredih.

  $V(K_{m,n}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ $\qquad |V(K_{m,n})| = m + n$
  $E(K_{m,n}) = \{v_i u_j \mid 1 \leq i \leq m \text{ in } 1 \leq j \leq n\}$ $\qquad |E(K_{m,n})| = m \cdot n$
  $\deg(v_i) = n\,,\ \deg(u_i) = m$ $\qquad K_{n,n}$ je n-regularen.

- **Cikli** *Cikel* na $n \geq 3$ točkah označimo s C_n.

  $V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $\qquad |V(C_n)| = n$
  $E(C_n) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}$ $\qquad |E(C_n)| = n$
  $\deg(v_i) = 2$ $\qquad C_n$ je 2-regularen graf.

Izomorfni grafi in podgrafi

Grafa G_1 in G_2 sta *izomorfna*, če obstaja preslikava $f\colon V(G_1) \to V(G_2)$, za katero velja:

1. f je bijektivna in
2. $u \sim_{G_1} v \iff f(u) \sim_{G_2} f(v)$.

V tem primeru pravimo, da je f *izomorfizem* grafov G_1 in G_2, ter pišemo $G_1 \cong G_2$. Izomorfizem ohranja število točk, število povezav, stopnje točk, število trikotnikov, ...

Pravimo, da je **graf** H *podgraf* grafa G, $H \subseteq G$,če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.

Podgraf H grafa G je *vpet podgraf*, če je $V(H) = V(G)$.

Podgraf H grafa G je *induciran podgraf*, če za vsako povezavo $e = uv \in E(G)$ velja: če sta u in v točki grafa H, potem je tudi e povezava v grafu H.

Predstavitev grafa z matriko

Naj bo G graf z n točkami: $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ m povezavami $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Matrika sosednosti (ali adjacenčna matrika) $A = A(G)$ grafa G je $n \times n$ matrika, v kateri so shranjeni podatki o sosednosti točk:

$$[A]_{ij} := \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izomorfna grafa $G_1 \cong G_2$ imata permutacijsko podobni matriki sosednosti: $A_2 = PA_1P^\top$, kjer je P neka permutacijska matrika.

Incidenčna matrika $\mathcal{I} = \mathcal{I}(G)$ grafa G je $n \times m$ matrika, v kateri so shranjene informacije, katere točke in povezave so med seboj incidentne:

$$[\mathcal{I}]_{ij} := \begin{cases} 1, & v_i \text{ je krajišče } e_j, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

6.2 Sprehodi v grafih, povezanost

Sprehod S v grafu $G = (V, E)$ je zaporedje točk

$$u_0u_1u_2 \dots u_{n-1}u_n,$$

pri čemer sta $u_i \sim u_{i+1}$ v grafu G ($i = 0, \dots, n-1$).

Dolžina sprehoda $S = u_0u_1 \dots u_n$ je enaka n, $|S| = n$. Točko u_0 imenujemo *začetek*, točko u_n pa *konec* sprehoda. $u - v$ *sprehod* je sprehod z začetkom v u in koncem v v.

Sprehod $S = u_0 \dots u_n$ je

- *enostaven*, če vsako povezavo uporabi največ enkrat,
- *pot*, če $u_i \neq u_j$ za vse $0 \leq i < j \leq n.$,
- *obhod*, če je $u_0 = u_n$,
- *cikel*, če je $u_0 = u_n$, sicer pa so točke med sabo različne in je $n \geq 3$.

Če v grafu $G = (V, E)$ obstaja $u - v$ sprehod, potem v G obstaja tudi $u - v$ pot. Najkrajši $u - v$ sprehod v grafu je pot.

Povezanost

Graf G je *povezan*, če za vsaki dve točki $u, v \in V(G)$ v grafu G obstaja $u - v$ sprehod (ekvivalentno, pot). Nepovezan graf je sestavljen iz *povezanih komponent*, tj. največjih povezani podgrafov.

Naj bo G povezan graf. *Razdalja* med točkama u in v v grafu G, $\mathrm{d}(u,v)$, je dolžina najkrajše $u-v$ poti (sprehoda) v G. Razdalja d v povezanem grafu ustreza *trikotniški neenakosti*: za poljubne tri točke u,v,w grafa G velja

$$\mathrm{d}(u,w) \leq \mathrm{d}(u,v) + \mathrm{d}(v,w).$$

$v \in V(G)$ je *prerezna točka* grafa G, če ima $G-v$ več povezanih komponent kot G. $e \in E(G)$ je *prerezna povezava* grafa G, če ima $G-e$ več povezanih komponent kot G. Velja: $e \in E(G)$ je prerezna povezava natanko tedaj, ko e ne leži na nobenem ciklu v grafu G.

Drevesa in gozdovi

Drevo je povezan graf brez ciklov. *Gozd* je graf brez ciklov.

Naj bo T drevo z n točkami in m povezavami. Potem velja:

(i) $m = n-1$.

(ii) Vsaka povezava v T je prerezna.

(iii) Za poljubni točki $u,v \in V(T)$ obstaja natančno ena $u-v$ pot v T.

(iv) Če drevesu T dodamo katerokoli novo povezavo, vsebuje dobljeni graf natanko en cikel.

$H \subseteq G$ je *vpeto drevo* v G, če je H vpet podgraf v G in hkrati drevo.

G je povezan $\iff$ G ima vsaj eno vpeto drevo.

Eulerjevi grafi

Eulerjev obhod je enostaven obhod v danem grafu, ki vsebuje vse povezave in vsa vozlišča. Graf G je *Eulerjev*, če ima kak Eulerjev obhod.

Izrek 5 (Eulerjev izrek). *Graf G je Eulerjev natanko tedaj, ko je G povezan in so vsa njegova vozlišča sodih stopenj.*

Če obstaja, lahko Eulerjev obhod poiščemo s *Fleuryjevim algoritmom*:

1. Izberi začetno točko.
2. Prečkaj povezavo, pri čemer izberi prerezno povezavo le, kadar ni na voljo nobene druge.
3. Odstrani prehojeno povezavo in vse izolirane točke.
4. Ponavljaj, dokler so v grafu še povezave.

Hamiltonovi grafi

Cikel v grafu G je *Hamiltonov*, če vsebuje vse točke grafa G. Hamiltonov cikel gre skozi vsako točko natančno enkrat. Graf G je *Hamiltonov*, če vsebuje kak Hamiltonov cikel.

Hamiltonov problem je mnogo težji kot Eulerjev. Enostavna karakterizacija Hamiltonovih grafov ne obstaja!

Trditev 1 (Diracov zadostni pogoj). *Naj bo G graf z vsaj tremi točkami* ($|V(G| = n \geq 3$). *Če za vsako točko*

$$v \in V(G) \text{ velja } \deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

potem je graf G Hamiltonov.

6.3 Ravninski grafi

Graf je *ravninski* (ali planaren), če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se noben par povezav ne seka (razen v morebitnem skupnem krajišču).

Vsaka ravninska risba grafa razdeli ravnino na območja, ki jih imenujemo *lica.*

Izrek 6 (Eulerjeva formula)**.** *Naj bo G povezan ravninski graf z n točkami, m povezavami in f lici. Potem velja*

$$n - m + f = 2.$$