

PRIIMEK	IME	VPISNA ŠTEVILKA	SMER

NALOGA	TOČKE
1.	
2.	
3.	
4.	
SKUPAJ	

## MATEMATIČNA ANALIZA 3

računski del  
24.1.2006

**Točkovanje:** 25+25+25+25=100

1. Skicirajte skico telesa

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$$

in izračunajte njegovo težišče, če je telo homogeno.

2. Krivulja  $\vec{K}$  je dana s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (t^2, 2t^2 - t, t + 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

(a) Pokažite, da je  $\vec{K}$  ravninska krivulja in poiščite ravnino v kateri leži.

(b) Določite delo  $A$ , ki ga opravi sila  $\vec{F} = (y, -2xz, z^2)$  pri pomiku masnega delca vzdolž krivulje  $\vec{K}$  od točke  $A(1, 3, 0)$  do točke  $B(1, 1, 2)$ .

3. Izračunajte pretok vektorskega polja  $\vec{a}(x, y, z) = (yz^2, 0, x^2)$  skozi spodnjo stran stožca

$$P = \{(x, y, z); z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 4\}.$$

Skicirajte  $\vec{P}$ .

4. Rešite začetni problem

$$y'(x) - \frac{\cos x}{\sin x} y(x) = \sin x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

# Rešitve

## 1. naloga

- Telo  $G$  je navzdol obrnjen rotacijski paraboloid z vrhom v  $(0, 0, 4)$  in krogom v ravnini  $z = 0$ , s središčem v  $(0, 0, 0)$  in polmerom 2, za osnovno ploskev.
- Vpeljemo cilindrične koordinate.
- Ker je telo homogeno, je  $\rho(x, y, z) = 1$
- $m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_0^{4-r^2} dz = \dots = 8\pi$
- Ker je telo simetrično glede na ravnini  $x = 0$  in  $y = 0$ , velja  $x_t = y_t = 0$ .
- $z_t = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_0^{4-r^2} z dz = \dots = \frac{4}{3}$

## 2. naloga

(a) Da je krivulja ravninska, lahko pokažemo na dva načina:

- Ker je torzija v vsaki točki krivulje enaka 0, vemo, da krivulja leži v pritisnjeni ravnini, katere normala je vzporedna  $\vec{B}$ . Izberemo si poljubno točko na krivulji, npr.  $t = 0$ , izračunamo  $\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0) = (-4, 2, 2)$ . Upoštevamo, da je  $\vec{r}(0) = (0, 0, 1)$  in dobimo enačbo ravnine  $2x - y - z = -1$ .
- Izberemo si tri točke na krivulji in poiščemo ravnino, na kateri ležijo. Na koncu še preverimo, da cela krivulja leži v tej ravnini.

(b)

$$\int_{K:A}^B \vec{F} d\vec{r} = \int_{-1}^1 (2t^2 - t, -2t^3 - 2t^2, t^2 + 2t + 1)(2t, 4t - 1, 1)dt = \dots = -\frac{8}{15}$$

## 3. naloga

Ploskev  $\vec{P}$  je tisti del plašča stožca z vrhom v  $(0, 0, 0)$ , ki leži pod ravnino  $z = 4$ , in njena normala v poljubni točki kaže navzdol.

Nalogo lahko rešimo direktno ali pa z uporabo Gaussovega izreka.

(a) direktno:

Ploskev parametriziramo  $\vec{f}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r)$ ,  $(r, \varphi) \in [0, 4] \times [0, 2\pi]$ .

Vektor  $\vec{f}_r \times \vec{f}_\varphi = (-r \cos \varphi, -r \sin \varphi, r)$  kaže navzgor, torej je orientacija  $\vec{f}_r \times \vec{f}_\varphi$  nasprotna orientaciji  $\vec{P}$ .

Pretok vektorskega polja je torej

$$\iint_{\vec{P}} \vec{a} d\vec{S} = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 (r^3 \sin \varphi, 0, r^2 \cos^2 \varphi)(-r \cos \varphi, -r \sin \varphi, r)dr = \dots = -64\pi.$$

(b) uporabimo Gaussov izrek:

Če ploskev  $\vec{P}$  dopolnimo s ploskvijo  $D = \{(x, y, 4) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \Delta\}$ , kjer je  $\Delta = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 16\}$ , in jo orientiramo z normalo  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ , dobimo rob stožca  $G$  orientiran z zunanjo normalo. Ker je  $\text{div } \vec{a} = 0$ , je

$$\iint_{\vec{P}} \vec{a} d\vec{S} = - \iint_{\vec{D}} \vec{a} d\vec{S} = - \iint_{\Delta} (yz^2, 0, x^2)(0, 0, 1)dxdy = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^4 r^3 dr = \dots = -64\pi.$$

Ploskev  $\vec{D}$  bi lahko parametrizirali tudi s  $\vec{p}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 4)$ ,  $(r, \varphi) \in [0, 4] \times [0, 2\pi]$ .

#### 4. naloga

Enačba  $y'(x) - \frac{\cos x}{\sin x} y(x) = \sin x$  je navadna linearna diferencialna enačba prvega reda. Rešitev prirejene homogene enačbe je  $y_H = C \sin x$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Z variacijo konstante dobimo partikularno rešitev  $y_P = x \sin x$ . Torej je splošna rešitev  $y = (C + x) \sin x$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Če upoštevamo še začetni pogoj, dobimo rešitev začetnega problema

$$y = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin x.$$