

PRIIMEK	IME	VPISNA ŠTEVILKA	SMER

NALOGA	TOČKE
1.	
2.	
3.	
4.	
SKUPAJ	

## MATEMATIČNA ANALIZA 3

računski del  
31.1.2006

**Točkovanje:** 20+30+25+25=100

1. Naj bo  $P$  ploskev  $z = x^2 - \frac{y^2}{2}$  in  $K$  krivulja  $\vec{r}(t) = \left(t, -t, \frac{t^2}{2}\right)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

(a) Dokaži, da krivulja  $K$  leži na ploskvi  $P$ .

(b) Poišči vse točke na krivulji  $K$ , v katerih se smer glavne normale ujema s smerjo normale ploskve  $P$ .

2. Izračunaj prostornino in površino telesa, omejenega s ploskvama

$$4z = x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1.$$

3. Naj bo  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + z, y^2 + x, z^2 + y)$  in  $\vec{P}$  del sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , kjer je  $z \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , orientiran z zunanjo normalo. Izračunaj

$$\iint_{\vec{P}} \text{rot } \vec{F} \, d\vec{S}.$$

4. Rešite diferencialno enačbo

$$y'' - 2y = e^x \sin x.$$

Za krivuljo s parametrizacijo  $\vec{p}(t)$  velja:  $\vec{T}(t) = \frac{\dot{\vec{p}}(t)}{\|\dot{\vec{p}}(t)\|}$ ,  $\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t)$ ,

$$\vec{B}(t) = \frac{\dot{\vec{p}}(t) \times \ddot{\vec{p}}(t)}{\|\dot{\vec{p}}(t) \times \ddot{\vec{p}}(t)\|}, \quad \kappa(t) = \frac{\|\dot{\vec{p}}(t) \times \ddot{\vec{p}}(t)\|}{\|\dot{\vec{p}}(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{[\dot{\vec{p}}(t), \ddot{\vec{p}}(t), \ddot{\vec{p}}(t)]}{\|\dot{\vec{p}}(t) \times \ddot{\vec{p}}(t)\|^2}.$$

## Rešitve

### 1. naloga

- (a) Preverimo, da koordinate krivulje zadoščajo enačbi ploskve.
- (b) Normala na ploskev je  $\vec{n} = (p, q, -1) = (2x, -y, -1)$ . Upoštevamo, da krivulja leži na ploskvi, in dobimo  $\vec{n} = (2t, t, -1)$ . Vektor glavne normale  $\vec{N}$  je vzporeden vektorju  $\dot{\vec{r}}(t) \times (\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)) = (t, -t, -2)$ . Torej se bosta smeri ujemali samo pri  $t = 0$  v točki  $(0, 0, 0)$ .

### 2. naloga

- Ploskev  $4z = x^2 + y^2$  je rotacijski paraboloid z vrhom v izhodišču, ploskev  $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$  pa je stožec z vrhom v  $(-1, 0, 0)$ . Ploskvi se sekata v krožnici s središčem v točki  $(0, 0, 1)$  in polmerom 2.
- Vpeljemo cilindrične koordinate in dobimo

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_{r-1}^{\frac{r^2}{4}} dz = \dots = \frac{2\pi}{3}$$

- Površino telesa  $P$  je sestavljena iz površine ustreznih delov paraboloida  $S_1$  in stožca  $S_2$ . Ustrezen del paraboloida lahko parametriziramo  $\vec{f}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \frac{r^2}{4})$ ,  $r \in [0, 2]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  in dobimo  $\sqrt{EG - F^2} = r\sqrt{1 + \frac{r^2}{4}}$ . Potem je

$$S_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r \sqrt{1 + \frac{r^2}{4}} dr = \dots = \frac{8\pi}{3}(\sqrt{8} - 1).$$

Če za izračun površine  $S_2$  uporabimo parametrizacijo stožca  $\vec{f}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r)$ ,  $r \in [0, 2]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , dobimo  $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{2}$ . Potem je

$$S_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{2} dr = \dots = 4\pi\sqrt{2}.$$

Pri izračunu površin bi lahko uporabili tudi kartezične koordinate.

### 3. naloga

Pretok vektorskega polja  $\text{rot } \vec{F}$  skozi ploskev  $\vec{P}$  lahko izračunamo direktno, z uporabo Stokesovega izreka ali pa z uporabo Gaussovega izreka.

(a) direktno:

Ker je ploskev del sfere, jo parametriziramo s sfernima koordinatama  $\vec{f}(\varphi, \psi) = (\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, \sin \psi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  in  $\psi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ . Vektor  $\vec{f}_\varphi \times \vec{f}_\psi = (\cos \varphi \cos^2 \psi, \sin \varphi \cos^2 \psi, \sin \psi \cos \psi)$  kaže navzgor, torej je orientacija  $\vec{f}_r \times \vec{f}_\phi$  enaka orientaciji  $\vec{P}$ . Pretok vektorskega polja  $\text{rot } \vec{F} = (1, 1, 1)$  je torej

$$\iint_{\vec{P}} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1, 1, 1)(\cos \varphi \cos^2 \psi, \sin \varphi \cos^2 \psi, \sin \psi \cos \psi) d\psi = \dots = \frac{\pi}{2}.$$

(Uporabili bi lahko tudi eksplicitno izražavo ploskve.)

(b) z uporabo Stokesovega izreka:

Krivuljo  $K$ , ki je rob ploskve  $P$ , parametriziramo  $\vec{r}(\varphi) = (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  in uporabimo Stokesov izrek

$$\iint_{\vec{P}} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{\vec{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi) (-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi, 0) d\varphi = \dots = \frac{\pi}{2}.$$

(c) uporabimo Gaussov izrek:

Če ploskev  $\vec{P}$  dopolnimo s ploskvijo  $D = \{(x, y, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \Delta\}$ , kjer je  $\Delta = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ , in jo orientiramo z normalo  $\vec{n} = (0, 0, -1)$ , dobimo rob odsekane krogle  $G$  orientirane z zunanjo normalo. Ker je  $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$ , je

$$\iint_{\vec{P}} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\vec{D}} \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\Delta} (1, 1, 1) \cdot (0, 0, -1) dx dy = pl(\Delta) = \frac{\pi}{2}.$$

Ploskev  $\vec{D}$  bi lahko parametrizirali tudi s  $\vec{p}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $(r, \varphi) \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}] \times [0, 2\pi]$ .

#### 4. naloga

- $y'' - 2y = e^x \sin x$  je linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti
- najprej rešimo prirejeno homogeno diferencialno enačbo  $y'' - 2y = 0$  z nastavkom  $y = e^{\lambda x}$
- dobimo karakteristično enačbo  $\lambda^2 - 2 = 0$  z rešitvama  $\lambda_1 = -\sqrt{2}$  in  $\lambda_2 = \sqrt{2}$
- splošna rešitev homogene diferencialne enačbe je torej oblike  $y_H = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x}$
- ker je desna stran  $f(x) = e^x \sin x$  oblike  $e^{\alpha x}(P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x)$ , kjer sta  $P(x)$  in  $Q(x)$  polinoma stopnje 0 in  $\alpha = 1 + i$  ni ničla karakteristične enačbe, je nastavek za partikularno rešitev  $y_P = e^x(A \cos x + B \sin x)$
- nastavek  $y_P = e^x(A \cos x + B \sin x)$  uporabimo v diferencialni enačbi in z izenačitvijo koeficientov dobimo  $A = B = -\frac{1}{4}$  ter splošno rešitev  $y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4} e^x (\cos x + \sin x)$