

Domače vaje iz INŽENIRSKÉ MATEMATIKE

Marjeta Kramar Fijavž
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani

2007/08

Kazalo

1	Vektorji in analitična geometrija	2
2	Matrike in sistemi enačb	8
3	Števila	16
4	Funkcije ene spremenljivke	22
5	Funkcije več spremenljivk	36

1 Vektorji in analitična geometrija

1. Točke A, B, C, D, E in F so zaporedna oglišča pravilnega šestkotnika. Naj bo G razpolovišče daljice FE ter S presečišče daljic GB in AC . Označimo: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Izračunaj koordinate točke S , če poznaš koordinate točk: $A(1, 2, 3)$, $B(8, 9, 10)$ in $C(1, 2, -4)$.
2. V enakokrakem trapezu $ABCD$ naj bo $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$ in $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Označimo z E razpolovišče stranice BC , s F razpolovišče stranice DC , s S pa presečišče daljic AC in EF . Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Primerjaj ploščino trikotnika SCE s ploščino trapeza.
3. V enakokrakem trapezu $ABCD$ naj bo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\vec{a}$ in $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Označimo z E razpolovišče stranice BC , s S pa presečišče daljic AE in BD .
 - (a) Izrazi vektorje $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{BD}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
 - (b) Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
 - (c) Določi koordinate točke S , če imajo točke A, B, C koordinate: $A(1, -1, 0)$, $B(0, 3, 2)$ in $C(2, 3, 6)$.
4. V pravilnem tetraedru $ABCD$ tvorijo vektorji $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ bazo prostora. Naj bo P nožišče višine iz točke D na osnovno ploskev ABC in Q nožišče višine iz točke A na ploskev BCD .
 - (a) Izrazi vektorja $\overrightarrow{DP}$ in $\overrightarrow{AQ}$ v bazi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
 - (b) Pokaži, da se višini DP in AQ sekata. Njuno presečišče označimo z E . Izrazi vektor $\overrightarrow{AE}$ v bazi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
5. Točke A, B, C, D, E, F, G in H so zaporedna oglišča kocke. Točka S je središče kvadrata $EFGH$, točka M pa deli stranico CG v razmerju $3 : 1$. Naj bo T točka, v kateri se sekata daljici AM in CS . Označimo še: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$.
 - (a) Izrazi vektor $\overrightarrow{AT}$ z vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$!
 - (b) Določi koordinate točke T , če poznamo koordinate naslednjih točk: $A(2, 1, 1)$, $B(4, 1, 1)$, $D(2, 3, 1)$ in $E(2, 1, 3)$!

6. Katera od danih množic tvori bazo prostora $\mathbb{R}^3$?

- (a) $\{(-1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 0)\}$,
- (b) $\{(1, 2, 3), (2, 1, 3), (0, 0, 0)\}$,
- (c) $\{(2, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 1, 4), (1, 5, 1)\}$,
- (d) $\{(1, 1, 2), (2, 2, 0), (3, 4, -1)\}$. Izrazi vektor $(2, 1, 3)$ kot linearno kombinacijo danih vektorjev, če je to mogoče!

7. Dani so vektorji

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \alpha \vec{v} + \vec{j} + 4\vec{k}, \\ \vec{b} &= \vec{v} - 2\alpha \vec{j}, \\ \vec{c} &= 3\alpha \vec{v} - 3\vec{j} + 4\vec{k},\end{aligned}$$

kjer so $\vec{v}, \vec{j}, \vec{k}$ linearno neodvisni vektorji. Določi skalar α tako, da bodo vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ležali na isti ravnini!

8. Določi skalarja α in β tako, da bo vektor $\vec{u} = (\alpha, \beta, 2)$ pravokoten tako na vektor $\vec{v} = (2, 1, 1)$ kot tudi na vektor $\vec{w} = (1, 0, 1)$!

9. Naj bodo vektorji

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (2t, 1, 1-t), \\ \vec{b} &= (-1, 3, 0), \\ \vec{c} &= (5, -1, 8).\end{aligned}$$

Določi parameter t tako, da bo vektor $\vec{a}$ oklepal enak kot z vektorjema $\vec{b}$ in $\vec{c}$. Izračunaj tudi dolžino pravokotne projekcije vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.

- 10. Kolikšen kot oklepata enako velika vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če sta vektorja $\vec{a} + 2\vec{b}$ in $5\vec{a} - 4\vec{b}$ pravokotna?
- 11. Naj bo $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18\sqrt{2}$, dolžina vektorja $|\vec{a}| = 6$ ter kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak $\frac{\pi}{4}$. Izračunaj ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $2\vec{b} - \vec{a}$ in $3\vec{a} - 4\vec{b}$.
- 12. Naj bodo $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ vektorji iz $\mathbb{R}^3$ z dolžinami: $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 1$. Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je enak $\frac{\pi}{3}$, kot med vektorjem $\vec{c}$ ter

ravnino, ki jo razpenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa je $\frac{\pi}{6}$. Izračunaj prostornino paralelepipeda, napetega na vektorje:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= 2\vec{a} - \vec{c}, \\ \vec{y} &= \vec{a} + \vec{c}, \\ \vec{z} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.\end{aligned}$$

13. Dana sta vektorja

$$\begin{aligned}\vec{m} &= 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, \\ \vec{n} &= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c},\end{aligned}$$

pri čemer poznamo dolžine vektorjev: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$, ter kote med njimi: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{4}$. Vektorja $\vec{m}$ in $\vec{n}$ razpenjata paralelogram. Zapiši vektorja diagonal tega paralelograma in izračunaj njuni dolžini.

14. Naj bodo $\vec{a} = (1, 2\alpha, 1)$, $\vec{b} = (2, \alpha, \alpha)$ in $\vec{c} = (3\alpha, 2, -\alpha)$, kjer je α neko realno število.

- (a) Izračunaj volumen tetraedra, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$!
- (b) Določi parameter α tako, da bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ ležali na isti ravnini! V tem primeru izrazi $\vec{a}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{b}$ in $\vec{c}$!

15. Določi višino tetraedra, ki ga določajo točke: $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$, $C(3, 1, 2)$ in $V(4, 4, 4)$.

16. Poišči dolžine stranic ter kote trikotnika z oglišči $A(-1, 2, 3)$, $B(2, 1, 2)$ in $C(0, 3, 0)$.

17. Vektorji $\vec{OA} = (5, 4, 0)$, $\vec{OB} = (2, 3, 1)$ in $\vec{OC} = (0, 1, 2)$ napenjajo paralelepiped. Izračunaj višino iz točke C na ploskev OAB ter volumen tega paralelepipeda.

18. Izračunaj kot med vektorjema

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\vec{p} + 2\vec{q} \quad \text{in} \\ \vec{b} &= \vec{p} + 5\vec{q},\end{aligned}$$

če je $|\vec{p}| = |\vec{q}|$ ter sta vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$ pravokotna. Kolikšna je ploščina paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$?

19. Točke $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$ in $C(1, 1, 1)$ določajo paralelepiped. Poišči:

- (a) enačbo premice - nosilke telesne diagonale iz točke O ;
- (b) enačbo ravnine, na kateri leži točka A in je vzporedna z ravnino, ki jo določajo točke O , B in C ;
- (c) kot pod katerim telesna diagonala iz O seka ploskev, določeno s točkami O , B in C .

20. Poišči kot med ravnino z enačbo $7x + 2y - z = 8$ ter premico, ki gre skozi točko $A(1, 1, c)$ v dani ravnini, in skozi točko $B(2, 3, -1)$.

21. Poišči pravokotno projekcijo premice

$$\begin{aligned}x + y - z - 1 &= 0, \\x - y + z + 1 &= 0,\end{aligned}$$

na ravnino $x + y + z = 0$. Kje se sekata premica in njena projekcija?

22. Ravnina Π gre skozi točko $T(3, 4, 1)$ in je vzporedna premicama:

$$p: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-2}, \quad \text{in} \quad q: x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Poišči enačbo ravnine Π , ter izračunaj razdaljo premice p od ravnine Π .

23. Skozi točki $A(1, 0, -2)$ in $B(0, 2, 2)$ položi ravnino, ki je vzporedna premici p , določeni z enačbama: $x + y - z = 0$, $x - 2y + z = 1$. Kolikšna je razdalja premice p do dobljene ravnine?

24. Dani sta premici:

$$p: x + 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3} \quad \text{in} \quad q: \frac{5-x}{3} = \frac{y-1}{2} = z + 1.$$

Poišči enačbo ravnine Σ , ki vsebuje premico p in je vzporedna premici q ! Kolikšna je razdalja premice q do ravnine Σ ?

25. Poišči enačbo premice, ki gre skozi točko $A(3, -1, -1)$, seka premico $x - 2 = \frac{y-5}{2} = \frac{z+3}{-2}$ in je vzporedna ravnini $x + y + z = 5$.

26. Določi takšno točko T na ravnini $x - y + 3z = 6$, da bo točka $T'(1, -1, 2)$ njena pravokotna projekcija na ravnino $x + y + z = 2$.

27. Označimo s P točko na premici $p: -x = \frac{y+1}{2} = z - 2$, ki je najbližja točki $T(2, 3, 2)$. Poišči enačbo ravnine, na kateri ležijo točke P, T in $R(3, 5, 5)$. Določi še kot med premico p in dobljeno ravnino.

Rešitve (Vektorji in analitična geometrija)

1. $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{7}\overrightarrow{a} + \frac{3}{7}\overrightarrow{b}$ in $S(1, 2, 0)$.
2. $\overrightarrow{AS} = \frac{5}{6}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$. Poščina trikotnika SCE je $\frac{1}{18}$ ploščine trapeza.
3. (a) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.
 (b) $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{8}\overrightarrow{b}$.
 (c) $S(1, 2, 3)$.
4. (a) $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ in $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c}$.
 (b) Višini DP in AQ se sekata, ker točke A, P, Q in D ležijo na isti ravnini. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{b} + \frac{1}{4}\overrightarrow{c}$.
5. (a) $\overrightarrow{AT} = \frac{8}{11}\overrightarrow{a} + \frac{8}{11}\overrightarrow{b} + \frac{6}{11}\overrightarrow{c}$.
 (b) $T(\frac{38}{11}, \frac{27}{11}, \frac{23}{11})$.
6. Bazo prostora $\mathbb{R}^3$ tvorita množici (a) in (d). Izražava:

$$\begin{aligned} (2, 1, 3) &= -\frac{3}{4}(-1, 1, 1) + \frac{5}{4}(1, 2, 3) - \frac{3}{4}(0, 1, 0) \\ &= (1, 1, 2) + 2(2, 2, 0) - (3, 4, -1). \end{aligned}$$
7. $\alpha = \pm 1$.
8. $\alpha = -2, \beta = 2$.
9. $t = \frac{1}{4}$, dolžina pravokotne projekcije vektorja $\overrightarrow{a}$ na vektor $\overrightarrow{b}$ pa je $\frac{\sqrt{10}}{4}$.
10. Vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ oklepata kot 60° .
11. Ploščina je $36\sqrt{2}$.
12. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.
13. Diagonali sta: $\overrightarrow{e} = 4\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{f} = 2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}$, njuni dolžini pa:
 $|\overrightarrow{e}| = 4$ in $|\overrightarrow{f}| = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$.
14. (a) Volumen je enak $\frac{1}{3}(3\alpha^3 - \alpha + 2)$.
 (b) Vektorji $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ ležijo na isti ravnini, če je $\alpha = -1$. V tem primeru je $\overrightarrow{a} = -4\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c}$.

15. Višina tetraedra je enaka $2\sqrt{3}$.
16. Dolžine stranic trikotnika so: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{11}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{11}$ in $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{3}$, koti pa $\alpha = \arccos \frac{5}{11}$ in $\beta = \gamma = \arccos \frac{\sqrt{33}}{11}$.
17. Višina je enaka $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, volumen pa 9.
18. Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je enak $\arccos \frac{3\sqrt{13}}{13} \doteq 33.7^\circ$, ploščina paralelograma, ki ga napenjata pa je $4\sqrt{13}|\vec{p}|^2 \sin \arccos \frac{3\sqrt{13}}{13} \doteq 8|\vec{p}|^2$.
19. (a) $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$.
 (b) $x - y = 1$.
 (c) $\arccos \frac{\sqrt{58}}{58} \doteq 7.5^\circ$.
20. Kot med premico in ravnino je približno 36° (natančneje $\arcsin \frac{13\sqrt{6}}{54}$).
21. Iskana pravokotna projekcija je premica z enačbo $(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) + \lambda(2, -1, -1)$. Premica in njena projekcija se sekata v točki $S(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
22. Enačba ravnine Π je $x + 4y - 3z = 16$, pravokotna projekcija točke S na to ravnino pa je točka $(2, 2, -2)$. Razdalja med premico p in ravnino Π je $\sqrt{26}$.
23. Iskana ravnina je $-2x + 7y - 4z = 6$, razdalja premice p do te ravnine pa je $\frac{4\sqrt{69}}{23}$.
24. Enačba ravnine Σ je $2x + 5y - 4z = 4$, premica q pa je od nje oddaljena za $\sqrt{5}$.
25. Iskana premice je $\vec{r} = (3, -1, -1) + \lambda(-4, 0, 4)$.
26. Iskana točka ima koordinate $T(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.
27. Iskana ravnina ima enačbo $-8x + 10y - 4z = 6$ in s premico p oklepa kot $\arcsin \frac{2\sqrt{30}}{15} \doteq 47^\circ$.

2 Matrike in sistemi enačb

1. Dana je matrika oblike

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Za katera realna števila a , b , in c matrika A komutira z matriko

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}?$$

(To pomeni, kdaj je $AB = BA$?)

2. Dana je matrika oblike

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Za katera realna števila a , b , in c je $A^2 = I$ (I je enotska 2×2 matrika)?

3. Dana je matrika oblike

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Poišči realna števila a , b , c in d , za katera je

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Podani sta matriki:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \\ 5 & -7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo: $AXB + AXI = I$. (I je enotska matrika.)

5. Podani sta matriki:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo $X^T C = D^{-1}$.

6. Poišči takšno matriko Y , da bo zadoščala enačbi $B + Y = YA - BA$, pri čemer sta:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametra β ter zapiši njegove rešitve:

$$\begin{aligned} x - y + 2z + u &= 1 \\ 2x + 3y - 2z - u &= 0 \\ 5x + 5y - 2z - u &= \beta. \end{aligned}$$

8. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametra a ter zapiši njegove rešitve:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 2x + 3y &= 5 \\ 2x + 3y + (a^2 - 4)z &= a + 3. \end{aligned}$$

9. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametrov a in b ter zapiši njegove rešitve:

$$\begin{aligned} ax + y + z + t &= 1 \\ x + ay + z + t &= b \\ x - y + az + t &= 0. \end{aligned}$$

10. Obravnavaj naslednji sistem linearnih enačb v odvisnosti od parametrov α in β ter zapiši njegove rešitve:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= \alpha \\ 6x_1 - 17x_2 + 2x_3 + \beta x_4 &= 3. \end{aligned}$$

11. Izračunaj determinanto matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

12. Izračunaj determinanto matrice

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

13. Izračunaj determinanto matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

14. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ali matriko A lahko diagonaliziramo? Če jo lahko, določi še tako obrnljivo matriko P , da bo matrika $P^{-1}AP$ diagonalna.

15. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ali matriko A lahko diagonaliziramo? Če jo lahko, določi še tako obrnljivo matriko P , da bo matrika $P^{-1}AP$ diagonalna.

16. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ali matriko A lahko diagonaliziramo? Če jo lahko, določi še tako obrnljivo matriko P , da bo matrika $P^{-1}AP$ diagonalna.

17. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ali matriko A lahko diagonaliziramo? Če jo lahko, določi tako obrnljivo matriko P , da bo matrika $P^{-1}AP$ diagonalna. S pomočjo tega izračunaj še A^5 .

18. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ali matriko B lahko diagonaliziramo? Če jo lahko, določi tako obrnljivo matriko P , da bo matrika $P^{-1}BP$ diagonalna. S pomočjo tega izračunaj še B^7 .

19. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje simetrične matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Določi še tako (ortogonalno) matriko P , da bo veljalo: $P^{-1} = P^T$ in $P^TAP = D$ za neko diagonalno matriko D . Naredi preizkus in izračunaj pomočjo narejenega še A^5 .

20. Ali so vektorji

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 2, -1, 1), \\ v_2 &= (-1, 0, 1, -2), \\ v_3 &= (0, 2, 3, 1), \\ v_4 &= (3, 0, 1, -3), \end{aligned}$$

baza prostora $\mathbb{R}^4$? Če so, zapiši vektor $(1, 2, 3, 4)$ kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

Rešitve (Matrike in sistemi enačb)

1. Matriki komutirata za $b = 0$ in $a = c$.

2. Rešitve so: $b = 0$, $a = \pm 1$, $c = \pm 1$, ter za $b \neq 0$: $-1 \leq a \leq 1$,
 $b = \sqrt{1 - a^2}$, $c = -a$.

3. Rešitve so: $c = 0$ in $a = b = d = -1$ ali $a = b = d = 1$.

4.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -9 & 7 \end{bmatrix}.$$

5.

$$X = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -3/4 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

6.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 6 & -4 & 7 & 13 \\ 4 & -4 & 4 & 12 \\ 2 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

7. Sistem ni rešljiv, če je $\beta \neq 1$. Pri $\beta = 1$ pa so rešitve sistema:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(λ in μ sta poljubni realni števili).

8. Sistem ni rešljiv, če je $a = -2$. Pri $a = 2$ so rešitve sistema:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

kjer je λ poljubno realno število. Če pa je $a \neq -2, 2$, je rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{a+2} \begin{bmatrix} a+5 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9. Sistem ni rešljiv, če je $a = 1$ in $b \neq 1$. Pri $a = b = 1$ so rešitve sistema:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(λ in μ sta poljubni realni števili). V primeru, ko je $a \neq 1$ pa so rešitve enake

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{a-1} \begin{bmatrix} 1-b \\ 0 \\ -b \\ ab+b-1 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{a+1}{a-1} \\ \frac{-a(a+1)}{a-1} \end{bmatrix}$$

(ν je poljubno realno število).

10. Sistem ni rešljiv pri parametrih $\beta = 6, \alpha \neq 2$. Pri $\beta = 6, \alpha = 2$ dobimo dvodimenzionalen prostor rešitev:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

pri $\beta \neq 6$ pa enodimenzionalen prostor rešitev:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha - 2 - \frac{\alpha-2}{\beta-6} \\ -\alpha - 1 \\ 0 \\ \frac{\alpha-2}{\beta-6} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

11. $\det(A) = -7$.

12. $\det(A) = 2$.

13. $\det(A) = -30$.

14. Lastne vrednosti matrike A so $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ in $\lambda_3 = -3$, ustrezni lastni vektorji pa:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriko lahko diagonaliziramo, ker ima tri linearno neodvisne lastne vektorje.

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

15. Lastne vrednosti matrike A so $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ in $\lambda_3 = 3$, ustrezni lastni vektorji pa:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriko lahko diagonaliziramo, ker ima tri linearno neodvisne lastne vektorje.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

16. Lastne vrednosti matrike A so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ in $\lambda_3 = 3$, ustrezni lastni vektorji pa:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Matriko lahko diagonaliziramo, ker ima tri linearno neodvisne lastne vektorje.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

17. Lastne vrednosti matrike A so $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 1$, ustrezni lastni vektorji pa:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matriko lahko diagonaliziramo, ker ima tri linearno neodvisne lastne vektorje.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^5 = PD^5P^{-1} = A.$$

18. Lastne vrednosti matrike B so $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_{2,3} = 1$, ustrezni lastni vektorji pa:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriko lahko diagonaliziramo, ker ima tri linearno neodvisne lastne vektorje.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^7 = PD^7P^{-1} = B.$$

19. Lastne vrednosti matrike A so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ in $\lambda_3 = 6$, ustrezni lastni vektorji pa:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 1556 & 3110 & 0 \\ 3100 & 6221 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{bmatrix}.$$

20. Dani vektorji so baza prostora $\mathbb{R}^4$, ker so med seboj linearno neodvisni in napenjajo cel prostor.

$$(1, 2, 3, 4) = -\frac{13}{35}v_1 - \frac{51}{35}v_2 + \frac{48}{35}v_3 - \frac{1}{35}v_4.$$

3 Števila

1. S pomočjo matematične indukcije pokaži, da je število $n^3 - 7n$ deljivo s 3 za vsako naravno število n . Natanko opiši potek dokaza!
2. S pomočjo matematične indukcije pokaži, da je število $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ deljivo s 17 za vsako naravno število n . Natanko opiši potek dokaza!
3. S pomočjo matematične indukcije pokaži, da je število $7^{n+1} - 2^{2n}$ deljivo s 3 za vsako naravno število n . Natanko opiši potek dokaza!
4. S pomočjo matematične indukcije pokaži, da za vsako naravno število n velja formula:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

5. S pomočjo matematične indukcije pokaži, da za vsako naravno število n velja formula:

$$2 + 7 + 15 + \cdots + \frac{n(3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{2}.$$

6. Naj bo a realno število in $a > -1$. S pomočjo matematične indukcije pokaži, da za vsako naravno število n velja formula:

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

7. Reši neenačbo: $|x-1| \leq 2 - |x^2+x|$.

8. Reši neenačbo: $|3 - |2x|| < |x|$.

9. Reši neenačbo:

$$\frac{|x-2|}{x^2-4} \leq 2x.$$

10. Dano je zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $n \geq 2$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{1-n}{n^2+n}.$$

Pokaži, da je zaporedje konvergentno in izračunaj limito a tega zaporedja! Kateri členi zaporedja ležijo znotraj okolice $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, če je $\varepsilon = 10^{-2}$?

11. Dano je zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{2n+1}{3n-2}.$$

Pokaži, da je zaporedje konvergentno in izračunaj limito a tega zaporedja! Za $\varepsilon = 10^{-2}$ poišči tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da bo veljalo: če je $n \geq n_0$, potem je $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

12. Dano je zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{3n-2}{1-2n}.$$

Pokaži, da je zaporedje konvergentno in izračunaj limito a tega zaporedja! Koliko členov zaporedja leži zunaj okolice $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, če je $\varepsilon = 10^{-3}$?

13. Zaporedje $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno formulo:

$$x_{n+1} = \frac{4x_n + 1}{3x_n + 1}, \quad x_1 = \frac{4}{3}.$$

- (a) Dokaži, da je zaporedje monotono in navzdol omejeno z 1.
- (b) Utemelji konvergenco zaporedja in izračunaj njegovo limito.
- (c) Zapiši še infimum in supremum množice členov zaporedja.

14. Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno formulo:

$$a_{n+1} = \sqrt{4 + 3a_n}, \quad a_1 = 1.$$

- (a) Dokaži, da je zaporedje navzgor omejeno s 5 in monotono.
- (b) Utemelji konvergenco zaporedja in izračunaj njegovo limito.
- (c) Zapiši še infimum in supremum množice členov zaporedja.

15. Zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno formulo:

$$a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}, \quad a_1 = 4.$$

Dokaži, da je zaporedje navzdol omejeno z 2 in monotono. Ali je zaporedje konvergentno? Izračunaj limito in prvih pet členov zaporedja na pet decimalk natančno.

16. Izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^n}{5^{n+1} - 2^{n+1}}.$$

17. Izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 1}) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3^{2n-1}}{3^{2n} - \pi^{n-1}}.$$

18. Izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{n-2}.$$

19. Izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2^n + 5^{n+1}} - \sqrt{5 + 2^n}).$$

20. Izračunaj n -to delno vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

in ugotovi, ali je konvergentna.

21. Ugotovi, ali je katera izmed naslednjih dveh vrst konvergentna:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

22. Ugotovi, ali je katera izmed naslednjih dveh vrst konvergentna:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n.$$

23. Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

konvergentna? Oceni napako, ki jo narediš, če sešteješ le prvih 7 členov vrste.

24. Določi naravno definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2 - x)^n$$

in izračunaj $f(\frac{3}{2})$.

25. Določi naravno definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x+4} \right)^n$$

in izračunaj $f(-1)$.

Rešitve (Števila)

1. Za $n = 1$ trditev velja: $1^3 - 7 \cdot 1 = -6 = -2 \cdot 3$. Indukcijsko predpostavko zapišimo v obliki: $k^3 = 3\lambda + 7k$. Zdaj si pa pogledjmo naš izraz pri $n = k + 1$ in uporabimo indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - 7(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 7k - 7 \\ &\stackrel{\text{ind.pr.}}{=} 3\lambda + 7k + 3k^2 + 3k + 1 - 7k - 7 \\ &= 3\lambda + 3k^2 + 3k - 6 = 3(\lambda + k^2 + k - 2). \end{aligned}$$

2. Za $n = 1$ trditev velja: $3 \cdot 5^{2 \cdot 1 + 1} + 2^{3 \cdot 1 + 1} = 391 = 13 \cdot 17$. Indukcijsko predpostavko zapišimo v obliki: $2^{3k+1} = 17\lambda - 3 \cdot 5^{2k+1}$. Zdaj si pa pogledjmo naš izraz pri $n = k + 1$ in uporabimo indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{2k+3} + 2^{3k+4} &\stackrel{\text{ind.pr.}}{=} 3 \cdot 5^{2k+1} \cdot 5^2 + 2^3 \cdot (17\lambda - 3 \cdot 5^{2k+1}) \\ &= 3 \cdot 5^{2k+1}(25 - 8) + 8 \cdot 17\lambda = 17(3 \cdot 5^{2k+1} + 8\lambda). \end{aligned}$$

3. Za $n = 1$ trditev velja: $7^{1+1} - 2^{2 \cdot 1} = 45 = 3 \cdot 15$. Indukcijsko predpostavko zapišimo v obliki: $7^{k+1} = 3\lambda + 2^{2k}$. Zdaj si pa pogledjmo naš izraz pri $n = k + 1$ in uporabimo indukcijsko predpostavko:

$$\begin{aligned} 7^{k+2} - 2^{2k+2} &= 7 \cdot 7^{k+1} - 2^2 \cdot 2^{2k} \\ &\stackrel{\text{ind.pr.}}{=} 7 \cdot (3\lambda + 2^{2k}) - 4 \cdot 2^{2k} \\ &= 21\lambda + 3 \cdot 2^{2k} = 3(7\lambda + 2^{2k}). \end{aligned}$$

4. Za $n = 1$ trditev velja: $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4}$. Predpostavimo, da trditev velja za $n = k$ in si pogledjmo naš izraz pri $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) &= \\ &\stackrel{\text{ind.pr.}}{=} \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}. \end{aligned}$$

5. Za $n = 1$ trditev velja: $\frac{1(3 \cdot 1 + 1)}{2} = 2 = \frac{1(1+1)^2}{2}$. Predpostavimo, da trditev velja za $n = k$ in si pogledjmo naš izraz pri $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 2 + 7 + 15 + \dots + \frac{k(3k+1)}{2} + \frac{(k+1)(3k+4)}{2} &= \\ &\stackrel{\text{ind.pr.}}{=} \frac{k(k+1)^2}{2} + \frac{(k+1)(3k+4)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)^2}{2}. \end{aligned}$$

6. Za $n = 1$ trditev velja: $(1 + a)^1 \geq 1 + 1 \cdot a$. Predpostavimo, da trditev velja za $n = k$ in si pogledjmo naš izraz pri $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} (1 + a)^{k+1} &\stackrel{\text{ind.pr.}}{=} (1 + a)^k (1 + a) \geq (1 + ka)(1 + a) \\ &= 1 + (k + 1)a + ka^2 \geq 1 + (k + 1)a \quad (\text{saj je } ka^2 \geq 0). \end{aligned}$$

7. Neenačbo rešijo vsi $x \in [-1, 1]$.

8. Rešitve neenačbe ležijo na intervalu $(-3, -1) \cup (1, 3)$.

9. Rešitve neenačbe ležijo na intervalu $\left(-2, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$.

10. Zaporedje je naraščajoče in navzgor omejeno (npr. z 0), zato je konvergentno. Njegova limita je $a = 0$, v dani okolici limite pa ležijo vsi členi zaporedja od 98-tega naprej.

11. Zaporedje je padajoče in navzdol omejeno, zato je konvergentno. Njegova limita je $a = \frac{2}{3}$ in $n_0 = 79$.

12. Zaporedje je padajoče in navzdol omejeno, zato je konvergentno. Njegova limita je $a = -\frac{3}{2}$, zunaj dane okolice limite pa leži prvih 250 členov zaporedja.

13. (a) Pokaže se s pomočjo matematične indukcije.

(b) Zaporedje je konvergentno, ker je padajoče in navzdol omejeno. Njegova limita je $\frac{3+\sqrt{21}}{6}$.

(c) $\inf x_n = \frac{3+\sqrt{21}}{6}$ in $\sup x_n = \frac{4}{3}$.

14. (a) Pokaže se s pomočjo matematične indukcije.

(b) Zaporedje je konvergentno, ker je naraščajoče in navzgor omejeno. Njegova limita je 4.

(c) $\inf a_n = 1$ in $\sup a_n = 4$.

15. Najprej s pomočjo matematične indukcije pokažemo, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno z 2, zato je tudi konvergentno. Njegova limita je 3. Prvih pet členov na pet decimalk natančno:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3.25, \quad x_3 = 3.07692, \quad x_4 = 3.025 \quad \text{in} \quad x_5 = 3.00826.$$

16. (a) $e^{-\frac{3}{2}}$.

(b) $\frac{1}{5}$.

17. (a) $\frac{3}{2}$.
 (b) $\frac{1}{3}$.
18. (a) 0.
 (b) e^2 .
19. (a) $\frac{1}{e}$.
 (b) ∞ .
20. $s_n = \ln(n+1)$ in vrsta ni konvergentna.
21. (a) ni konvergentna (b) je konvergentna
22. (a) ni konvergentna (b) je konvergentna
23. S pomočjo Leibnizovega kriterija ugotovimo, da je vrsta konvergentna.
 Napaka: $|s - s_7| = |a_8| = 3 - 2\sqrt{2} = 0.14$.
24. $D_f = (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ in $f(\frac{3}{2}) = 3$.
25. $D_f = (-2, \infty)$ in $f(-1) = -\frac{1}{4}$.

4 Funkcije ene spremenljivke

1. Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \ln(|3x + 2| - 4|x - 1|).$$

2. Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \sqrt{\frac{|5x + 2|}{|2x - 3|} - 3}.$$

3. Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \ln(1 - |1 - |x - 1||).$$

4. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$$

ter ugotovi, ali je f injektivna, surjektivna, bijektivna!

5. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije

$$f(x) = \frac{3 - e^x}{2 + e^x}$$

ter ugotovi, ali je f injektivna, surjektivna, bijektivna!

6. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije

$$f(x) = \frac{1}{2 + e^{-x}}$$

ter ugotovi, ali je f injektivna, surjektivna, bijektivna!

7. Funkciji f in g sta podani s predpisoma:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} -x - 1, & x \leq -1, \\ 0, & -1 < x < 1, \\ x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Poišči kompozitume: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ in $g \circ g$!

8. Izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - mx} - 1}{x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}.$$

9. Izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{x^3 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - x} - 1}.$$

10. Izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}.$$

11. Poišči vrednosti realnih parametrov a in b tako, da bo dana funkcija povsod zvezna:

$$f(x) = \begin{cases} a \frac{(1 - \sqrt{\cos x})}{x^2}, & x < 0, \\ b, & x = 0, \\ \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

12. Poišči vrednosti realnih parametrov a in b tako, da bo dana funkcija povsod zvezna:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ \ln(b + x), & x > 0. \end{cases}$$

13. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} x^{1 - \cos x}.$$

14. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{1 + x - e^x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x^2}})x.$$

15. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^3)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\sin 2x}}.$$

16. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

17. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \cos 2x}{x^6 + 4x} \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 0} (\tan x)^{\sin x}.$$

18. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 2x)^{\tan 2x}.$$

19. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = 2(x^2 + 3x)e^{-\frac{x}{2}}.$$

Določi definicijsko območje funkcije f in poišči njene ničle. Določi vse stacionarne točke f ter poišči najmanjšo in največjo vrednost funkcije f na intervalu $[0, 4]$.

20. Poišči vse lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = 2x \cos(2x) - \sin(2x)$$

ter maksimum in minimum na intervalu $[\pi, 2\pi]$.

21. Poišči vse lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = 2 \tan x - \tan^2 x$$

ter maksimum in minimum na intervalu $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

22. S pomočjo odvoda pokaži, da za vse $x \geq 1$ velja:

$$2 + (x + 1) \ln x \geq 2x.$$

23. S pomočjo odvoda pokaži, da za vse $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ velja:

$$\tan x \geq -2 \ln(\cos x).$$

24. S pomočjo odvoda ugotovi, v kateri točki krivulje

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$$

oklepa tangenta z osjo x kot $\frac{\pi}{4}$.

25. Določi Taylorjev polinom reda 4 v točki $x = 0$ funkcije

$$f(x) = \tan x - xe^{\frac{x^2}{3}}.$$

26. S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost števila

$$\sqrt[3]{1 + \ln(1, 1)}$$

in oceni napako.

27. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = x + \frac{x}{x-1}.$$

Natančno določi definicijsko območje funkcije in razišči obnašanje funkcije na robu območja. Poišči ničle, lokalne ekstreme in prevojne točke. Določi intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter skiciraj njen graf.

28. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = x \ln x.$$

Natančno določi definicijsko območje funkcije in razišči obnašanje funkcije na robu območja. Poišči ničle, lokalne ekstreme in prevojne točke. Določi intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter skiciraj njen graf.

29. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}.$$

Natančno določi definicijsko območje funkcije in razišči obnašanje funkcije na robu območja. Poišči ničle, lokalne ekstreme in prevojne točke. Določi intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f ter skiciraj njen graf.

30. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2.$$

Določi definicijsko območje funkcije, ničle, stacionarne in prevojne točke, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f . Določi vrsto lokalnih ekstremov in globalni minimum ter maksimum funkcije f na intervalu $[-1, 2]$. Skiciraj še graf funkcije!

31. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Določi definicijsko območje funkcije, ničle, stacionarne in prevojne točke, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f . Določi vrsto lokalnih ekstremov in globalni minimum ter maksimum funkcije f na intervalu $[-1, 2]$. Skiciraj še graf funkcije!

32. Dan je funkcijski predpis

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 2}.$$

Določi definicijsko območje funkcije, ničle, stacionarne in prevojne točke, intervale monotonosti, konveksnosti in konkavnosti funkcije f . Določi vrsto lokalnih ekstremov in globalni minimum ter maksimum funkcije f na intervalu $[-1, 2]$. Skiciraj še graf funkcije!

33. Izračunaj določena integrala:

$$(a) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}, \quad (b) \int_1^9 \frac{3(x^2 + 1)}{2\sqrt{x^3 + 3x}} dx.$$

34. Izračunaj določena integrala:

$$(a) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x \, dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{6x - 5}{(3x^2 - 5x + 5)^2} dx.$$

35. Izračunaj določena integrala:

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx, \quad (b) \int_0^1 \arctan x \, dx.$$

36. Izračunaj izlimitiran integral, če obstaja:

$$\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx.$$

37. Izračunaj izlimitiran integral, če obstaja:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

38. Izračunaj izlimitiran integral, če obstaja:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

39. Izračunaj izlimitiran integral, če obstaja:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

40. Naj bo $f(x) = \frac{1}{x}$. Ali obstaja ploščina lika

$$L = \{(x, y) \mid x \geq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}?$$

41. Naj bo $f(x) = \frac{1}{x}$. Ali obstaja prostornina telesa, ki ga dobimo z rotacijo lika

$$L = \{(x, y) \mid x \geq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

okrog x -osi?

42. Izračunaj ploščino lika, omejenega z grafoma funkcij

$$f(x) = \ln x \quad \text{in} \quad g(x) = \ln^2 x.$$

43. Izračunaj ploščino lika, omejenega z grafoma funkcij

$$f(x) = x \quad \text{in} \quad g(x) = x + \sin^2 x.$$

44. Izračunaj ploščino lika, omejenega z grafoma funkcij

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{x}{2}.$$

45. Izračunaj ploščino lika, omejenega z grafoma funkcij

$$y^2 = 2x \quad \text{in} \quad y = \frac{1}{2}x^2.$$

46. Izračunaj ploščino lika, omejenega s krivuljami

$$y = -x^2 + 1, \quad y = (1 - x)^2 \quad \text{in} \quad |x| + 1.$$

47. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobimo z rotacijo pentlje krivulje

$$9y^2 = x(x - 3)^2$$

okoli x -osi (pentlja je del krivulje med ničloma funkcije).

48. Izračunaj dolžino pentlje krivulje

$$9y^2 = x(x - 3)^2$$

(pentlja je del krivulje med ničloma funkcije).

49. Poišči težišče lika, omejenega s parabolo $y = \sqrt{2x}$, x -osjo in premico $x = 2$.

50. Poišči težišče lika, omejenega s krivuljama

$$x^2 = 4y + 4 \quad \text{in} \quad x^2 = -2y + 4.$$

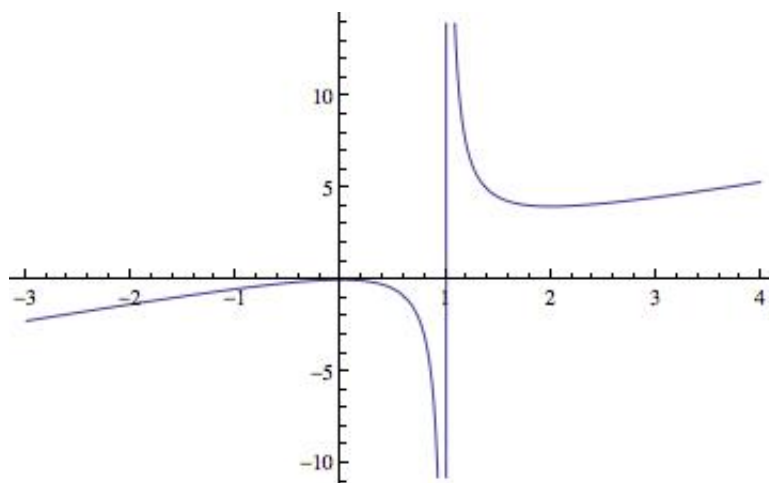
Rešitve (Funkcije ene spremenljivke)

1. Definijsko območje dane funkcije je $(\frac{2}{7}, 6)$.
2. Definijsko območje dane funkcije je $[\frac{7}{11}, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 11]$.
3. Definijsko območje dane funkcije je $(-1, 1) \cup (1, 3)$.
4. Definijsko območje in zaloga vrednosti funkcije sta enaka $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Funkcija je injektivna in na svojem definijskem območju tudi surjektivna, zato je tam tudi bijektivna.
5. Definijsko območje: $\mathbb{R}$, funkcija je injektivna, a ni surjektivna, zato tudi ni bijektivna.
6. Definijsko območje funkcije je $\mathbb{R}$, zaloga vrednosti pa interval $(0, \frac{1}{2})$. Funkcija je injektivna in na svojem definijskem območju tudi surjektivna, zato je tam tudi bijektivna.
7. Iskani kompozitumi so: $(f \circ g)(x) = 1$,

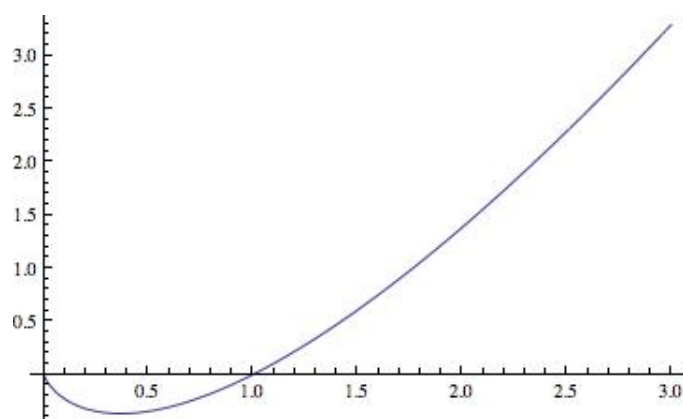
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= \begin{cases} -x - 2, & x \leq -2, \\ 0, & x > -2, \end{cases} \\(f \circ f)(x) &= \begin{cases} x + 2, & x < -1, \\ 0, & x \geq -1, \end{cases} \\(g \circ g)(x) &= \begin{cases} -x - 2, & x \leq -2, \\ 0, & -2 < x < 2, \\ x - 2, & x \geq 2. \end{cases}\end{aligned}$$

8. (a) $\frac{-m}{2}$. (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
9. (a) -1 . (b) -2 .
10. (a) $\frac{2}{13}$. (b) 1 .
11. Vrednosti parametrov sta: $a = 4$ in $b = 1$.
12. Vrednosti parametrov sta: $a = 1$ in $b = e$.
13. (a) 0 . (b) 1 .
14. (a) -6 . (b) 1 .

15. (a) 0. (b) ∞ .
16. (a) ∞ . (b) 0.
17. (a) $\frac{3}{4}$. (b) 1.
18. (a) $\frac{1}{2}$. (b) 1.
19. Definijsko območje funkcije je $\mathbb{R}$, ničli pa ima v točkah $x_1 = 0$ in $x_2 = -3$. Stacionarni točki sta $x_1 = 3$ in $x_2 = -2$. Maksimalna vrednost na danem intervalu je $f(3) = 36e^{-\frac{3}{2}}$, minimalna pa $f(0) = 0$.
20. Stacionarne točke funkcije so oblike $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Maksimalna vrednost na danem intervalu je $f(2\pi) = 4\pi$, minimalna pa $f(\frac{3\pi}{2}) = -3\pi$.
21. Funkcija ima na danem intervalu le eno stacionarno točko $x = \frac{\pi}{4}$, maksimalna vrednost je $f(\frac{\pi}{4}) = 1$, minimalna pa $f(-\frac{\pi}{3}) = -2\sqrt{3} - 3$.
22. Pišemo: $f(x) = 2 + (x+1)\ln x - 2x$, odvajamo in ugotovimo, da je na zahtevanem intervalu $f'(x) \geq 0$, kar pomeni, da funkcija tam narašča. Ker je $f(1) = 0$, mora biti torej f na danem intervalu pozitivna.
23. Pišemo: $f(x) = \tan x + 2\ln(\cos x)$, odvajamo in ugotovimo, da je na zahtevanem intervalu $f'(x) \geq 0$, kar pomeni, da funkcija tam narašča. Ker je $f(0) = 0$, mora biti torej f na danem intervalu pozitivna.
24. To se zgodi v točkah $T_1(1, 1)$ in $T_2(3, -1)$.
25. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{27}x^4 + R_5$.
26. Približna vrednost je $\frac{31}{30}$, ocena za napako pa 0.0027.
27. Definijsko območje funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, v 1 ima funkcija pol, v neskončnosti pa se približuje asimptoti $y = x + 1$. Ničlo ima funkcija v točki $x = 0$, lokalne ekstreme v točkah $x_1 = 0$ (lok. maks.) in $x_2 = 2$ (lok. min), prevojev pa nima. Funkcija narašča na intervalih $(-\infty, 0)$ in $(2, \infty)$ ter pada na intervalih $(0, 1)$ in $(1, 2)$. Pri $x < 1$ je funkcija konkavna, pri $x > 1$ pa konveksna.
28. Definijsko območje funkcije je $(0, \infty)$, blizu 0 gre funkcija proti 0, v neskončnosti pa neomejeno narašča, asimptote nima. Ničlo ima funkcija v točki $x = 1$, lokalni minimum v točki $x = \frac{1}{e}$, prevojev pa nima. Funkcija narašča na intervalu $(\frac{1}{e}, \infty)$ ter pada na intervalu $(0, \frac{1}{e})$. Funkcija je povsod konveksna.

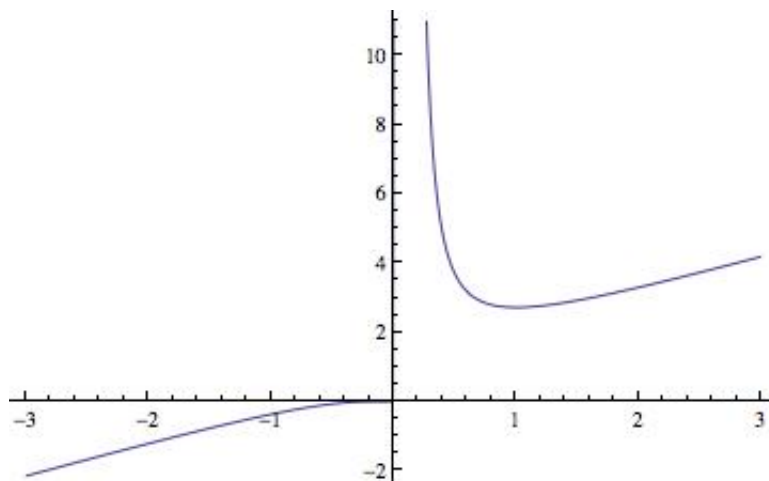


Slika 1: $f(x) = x + \frac{x}{x-1}$



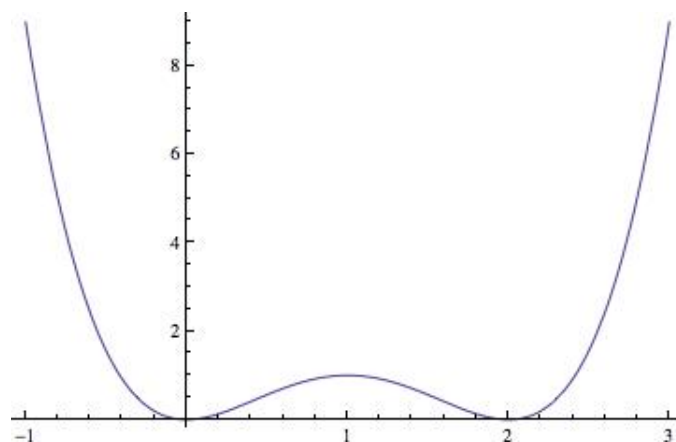
Slika 2: $f(x) = x \ln x$

29. Definijsko območje funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, z leve strani 0 se funkcija približuje 0, z desne pa narašča v neskončnost. V neskončnosti se funkcija približuje asimptoti $y = x + 1$. Ničel in prevojev funkcija nima, lokalni minimum pa ima v točki $x = 1$. Funkcija narašča na intervalih $(-\infty, 0)$ in $(1, \infty)$ ter pada na intervalu $(0, 1)$. Pri $x < 0$ je funkcija konkavna, pri $x > 0$ pa konveksna.



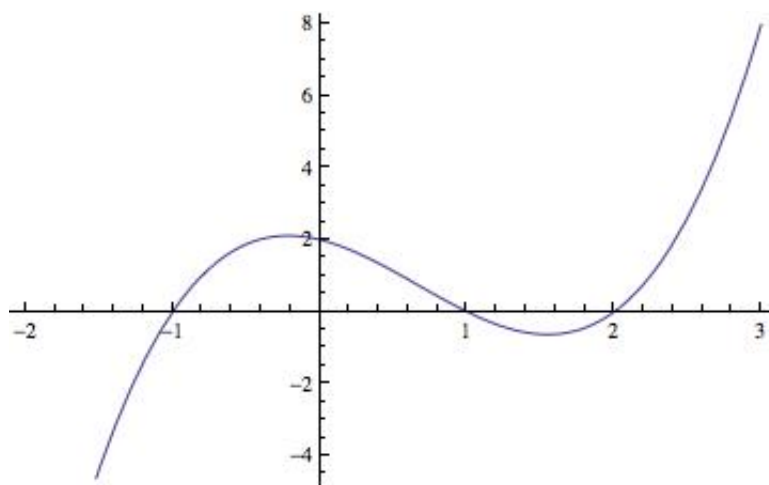
Slika 3: $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

30. Definijsko območje funkcije je cel $\mathbb{R}$, asimptote nima. Ničle so v točkah $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$, lokalni ekstremi v točkah $x_1 = 0$ (lok. min.), $x_2 = 1$ (lok. maks.) in $x_3 = 2$ (lok. min.), prevoja pa sta v točkah $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ in $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$. Funkcija narašča na intervalih $(0, 1)$ in $(2, \infty)$ ter pada na intervalih $(-\infty, 0)$ in $(1, 2)$. Na intervalu $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$ je funkcija konkavna, na intervalih $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$ in $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ pa konveksna. Globalni maksimum na danem intervalu doseže funkcija v točki $x = -1$ in je enak 9, globalni minimum pa je 0, dosežen v točkah $x = 0$ in $x = 2$.
31. Definijsko območje funkcije je cel $\mathbb{R}$, asimptote nima. Ničle so v točkah $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ in $x_3 = 2$, lokalna ekstrema v točkah $x_1 = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ (lok. maks.) in $x_2 = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ (lok. min.), prevoj pa v točki $x = \frac{2}{3}$. Funkcija narašča na intervalih $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$ in $\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$ ter pada na intervalu $\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}, \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$. Pri $x < \frac{2}{3}$ je funkcija konkavna, pri $x >$



Slika 4: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

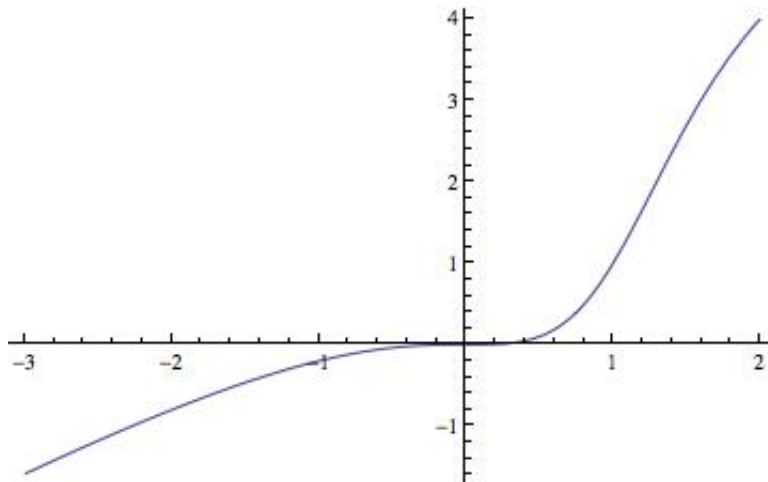
$\frac{2}{3}$ pa konveksna. Na intervalu $[-1, 2]$ se globalna ekstrema ujemata z lokalnima.



Slika 5: $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

32. Definijsko območje funkcije je cel $\mathbb{R}$, polov nima, v neskončnosti pa se približuje asimptoti $y = x + 2$ (seka jo v točki $x = 2$). Ničlo in prevoj ima funkcija v točki $x = 0$, lokalnih ekstremov nima. Funkcija vseskozi narašča. Na intervalih $(-\infty, 0)$ in $(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ je funkcija konkavna, na intervalih $(0, 3 - \sqrt{3})$ in $(3 + \sqrt{3}, \infty)$ pa konveksna. Globalni minimum na danem intervalu doseže funkcija v točki $x = -1$

in je enak $-\frac{1}{5}$, globalni maksimum pa je 4 in je dosežen v točki $x = 2$.



Slika 6: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 2}$

33. (a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. (b) $6\sqrt{21} - 2$.

34. (a) $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{6}$. (b) $-\frac{2}{15}$.

35. (a) $\frac{\pi}{2} - 1$. (b) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

36. $-\frac{1}{2}$.

37. 3.

38. $\frac{\pi}{2}$.

39. 2.

40. Ploščina lika (tj. izlimitiran integral $pl = \int_1^\infty \frac{1}{x} dx$) ne obstaja.

41. $V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \pi$.

42. $pl = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x) dx = 3 - e$.

43. $\frac{\pi}{2}$.

44. $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

45.

$$pl = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{4}{3}.$$

46.

$$pl = \int_0^1 ((x+1) - (-x^2+1)) dx + \int_1^3 ((x+1) - (1-x)^2) dx = \frac{25}{6}.$$

47.

$$V = \pi \int_0^3 \frac{x(x-3)^2}{9} dx = \frac{3\pi}{4}.$$

48.

$$s = 2 \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{(x-1)^2}{4x}} dx = 4\sqrt{3}.$$

49. Težišče lika je v točki $T(\frac{6}{5}, \frac{3}{4})$, njegova ploščina pa je enaka

$$pl = \int_0^2 \sqrt{2x} dx = \frac{8}{3}.$$

50. Težišče lika je v točki $T(0, \frac{2}{5})$, njegova ploščina pa je enaka

$$pl = 2 \int_{-1}^0 \sqrt{4x+4} dx + 2 \int_0^2 \sqrt{-2x+4} dx = 8.$$

5 Funkcije več spremenljivk

1. Določi in nariši v (x, y) -ravnini definicijsko območje funkcije

$$f(x, y) = \ln(x \ln(y - x)).$$

2. Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{xy},$$

preseke grafa s koordinatnimi ravninami in nivojnice (izohipse).

3. Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},$$

preseke grafa s koordinatnimi ravninami in nivojnice (izohipse).

4. Podana je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2+y}{\sqrt{x^2+3y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ a, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ali lahko določiš konstanto a tako, da bo f zvezna na celi ravnini $\mathbb{R}^2$?

5. Podana je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ a, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ali lahko določiš konstanto a tako, da bo f zvezna na celi ravnini $\mathbb{R}^2$?

6. Podana je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2y-x}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ a, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ali lahko določiš konstanto a tako, da bo f zvezna na celi ravnini $\mathbb{R}^2$?

7. Naj bo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in $f(x, y) = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$. Izračunaj:

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} - xy \frac{\partial f}{\partial y} + y^2.$$

8. Naj bo $f(x, y) = y^2 \ln(xy)$. Izračunaj:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

9. Naj bo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$. Izračunaj:

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - (x + 1) \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

10. Naj bo $u = f(r)$, $r > 0$, $r^2 = x^2 + y^2$. Izračunaj:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

11. S pomočjo totalnega diferenciala približno izračunaj $1.1^{0.99}$.

12. Naj bo $T(x, y) = x^2 + y^3$ temperatura v točki (x, y) . Popotniku, ki se nahaja v točki $A(1, 2)$, je vroče. V katero smer naj se odpravi, da se čimprej ohladi?

13. Poišči najmanjše in največje vrednosti funkcije

$$f(x, y) = e^{3\sqrt{3}xy}$$

na območju, omejenem s parabolo $y = x^2 - 1$ in premico $y = 1$.

14. Poišči najmanjše in največje vrednosti funkcije

$$f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

na območju, omejenem s parabolo $y = x^2$ in premico $y = 4$.

15. Poišči najmanjše in največje vrednosti funkcije

$$f(x, y) = (x - 2)^2 - y^2$$

na območju

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1, x \in [-2, 3], y \in [-2, 2]\}.$$

16. Poišči točko na paraboli $y = x^2$, ki je najbližja točki $T(-1, 5)$. Kolikšna je najkrajša razdalja točke T do dane parabole?

17. Poišči najmanjše in največje vrednosti funkcije

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

na območju

$$\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

18. Poišči najmanjše in največje vrednosti funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$$

na njenem definicijskem območju.

19. Nariši integracijsko območje in zamenjaj vrstni red integracije v naslednjem dvojnem integralu:

(a)

$$\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x, y) dx,$$

(b)

$$\int_{-2}^1 dx \int_{x^2+4x}^{3x+2} f(x, y) dy,$$

(c)

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx,$$

(d)

$$\int_1^4 dx \int_{(x-2)^2}^x f(x, y) dy.$$

20. Izračunaj dvojni integral:

$$\iint_D x^2 y e^{xy} dx dy,$$

kjer je integracijsko območje

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}.$$

21. Izračunaj dvojni integral

$$\iint_D \frac{y}{x\sqrt{1-x^2}} dx dy,$$

kjer je D območje, ki ga omejujejo krivulje: $y = -2x$, $y = \sqrt{x}$ in $x = \frac{1}{2}$.

22. S pomočjo zamenjave vrstnega reda integracije izračunaj dvojni integral

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^x \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

23. Izračunaj dvojni integral:

$$\iint_D y^2 \sin x dx dy,$$

kjer je območje D omejeno s koordinatnimi osmi ter krivuljo $y = 1 + \cos x$ med $x = 0$ in $x = \pi$.

24. Nariši integracijsko območje in izračunaj dvojni integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{3 \cos y} x^2 \sin^2 y dx.$$

25. V dvojnem integralu $\iint_D f(x, y) dx dy$ preidi k polarnim koordinatam, kjer je

(a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\},$

(b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4x\}.$

26. Izračunaj dvojni integral

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy,$$

kjer je območje D omejeno s krožnico $x^2 + y^2 = 2ax$.

27. Poišči volumen telesa, omejenega s ploskvami:

$$z = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{in} \quad x^2 + y^2 = e^2.$$

Nasvet: pomagaj si s polarnimi koordinatami.

28. Izračunaj volumen telesa, omejenega s ploskvami:

$$z = e^{-x^2-y^2}, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{in} \quad z = 0.$$

29. Paralelogram D je omejen s premicami:

$$y = a, \quad y = 3a, \quad y = x \quad \text{in} \quad y = x + a \quad (a > 0).$$

Skiciraj ga ter izračunaj vztrajnostni moment paralelograma D okrog koordinatnega izhodišča! ($I_0 = \int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$)

30. Poišči težišče lika, ki ga omejujeta krivulji:

$$y^2 = 4x + 4 \quad \text{in} \quad y^2 = -2x + 4.$$

31. Izračunaj vztrajnostni moment homogenega trikotnika s koordinatami $A(0,0)$, $B(3,0)$ in $C(2,3)$ glede na y -os.

32. Izračunaj krivuljni integral

$$\int_{K:A}^B 4x^3y dx + (x^4 + 2y) dy,$$

kjer je K daljica med točkama $A(0,0)$ in $B(1,1)$.

33. Izračunaj krivuljni integral

$$\int_{K:A}^B 4x^3y dx + (x^4 + 2y) dy,$$

kjer je K lok parabole $y = x^2$ od $A(0,0)$ do $B(1,1)$.

34. Izračunaj krivuljni integral

$$\int_K y^2 dx + x^2 dy,$$

kjer je K zgornja polovica elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

35. S pomočjo Greenove formule izračunaj ploščino notranjosti kardioide:

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t).$$

36. Poišči rešitev diferencialne enačbe $y' + y = -x$, ki ustreza začetnemu pogoju $y(0) = 2$.

37. Poišči rešitev diferencialne enačbe $y'\operatorname{tg}x - y = 1$, ki ustreza začetnemu pogoju $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.
38. Poišči rešitev diferencialne enačbe: $y' \sin x - y \cos x = \sin^3 x$, ki ustreza začetnemu pogoju $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.
39. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe:
- (a) $y''' - 6y'' + 5y' = 0$,
 - (b) $y^{IV} - 9y''' + 14y'' = 0$,
 - (c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$,
 - (d) $y''' + 2y'' + 5y' = 0$.

Rešitve (Funkcije več spremenljivk)

1. Definijsko območje funkcije je enako

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x < 0 \text{ in } 1 + x > y > x) \text{ ali } (x > 0 \text{ in } y > x + 1)\}.$$

2. Definijsko območje funkcije je enako

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \leq 0 \text{ in } y \leq 0) \text{ ali } (x \geq 0 \text{ in } y \geq 0)\}.$$

Presek grafa s koordinatnimi ravninami sestavljata abscisna in ordinatna os, nivojnice pa so krivulje $y = \frac{k^2}{x}$, $k \in \mathbb{R}$.

3. Funkcija je definirana na celi ravnini $\mathbb{R}^2$, Presek grafa s koordinatno ravnino $x = 0$ sta premici $y + z = 1$, $-y + z = 1$, z ravnino $y = 0$ premici $x + z = 1$, $-x + z = 1$, z ravnino $z = 0$ pa krožnica $x^2 + y^2 = 1$. Nivojnice so krožnice $x^2 + y^2 = (1 - k)^2$, $k \in \mathbb{R}$.

4. Ker je limita dane funkcije v točki $(0, 0)$ odvisna od smeri, konstante a ne moremo določiti tako, da bi bila funkcija povsod zvezna.

5. Ker je limita dane funkcije v točki $(0, 0)$ odvisna od smeri, konstante a ne moremo določiti tako, da bi bila funkcija povsod zvezna.

6. Če je $a = 0$, je funkcija povsod zvezna, saj je taka limita dane funkcije v točki $(0, 0)$.

7. 0.

8. $y \left(-\frac{y}{x^2} + 2 \ln(xy) + 1 \right).$

9. 0.

10. $f''(r) + f'(f)^{\frac{1}{r}}.$

11. Približna vrednost je 1.1.

12. Iskana smer je enaka $-\text{grad } f(1, 2) = (-2, -12).$

13. Na danem območju je najmanjša vrednost funkcije enaka $f(-\sqrt{2}, 1) = e^{-3\sqrt{6}}$, največja pa $f(\sqrt{2}, 1) = e^{3\sqrt{6}}.$

14. Na danem območju je najmanjša vrednost funkcije enaka $f(0, 0) = 0$, največja pa $f(-2, 4) = f(2, 4) = 32.$

15. Na danem območju je najmanjša vrednost funkcije enaka $f(2, \pm 2) = -4$, največja pa $f(-2, 0) = 16$.
16. Iskana točka je $T_1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{2} \right)$, najkrajša razdalja točke T do parabole pa je enaka razdalji med točkama T in T_1 , ki je $\frac{\sqrt{23-12\sqrt{2}}}{2}$.
17. Na danem območju je najmanjša vrednost funkcije enaka $f(0, 0) = 0$, največja pa $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
18. Definijsko območje funkcije je kvadrat

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ in } -1 \leq y \leq 1\}.$$

Na tem območju je najmanjša vrednost funkcije enaka $f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = f(1, 1) = f(1, -1) = f(-1, 1) = f(-1, -1) = \sqrt{2}$, največja pa $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{6}$.

19. (a)

$$\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} f(x, y) dy.$$

- (b)

$$\int_{-4}^5 dy \int_{\frac{y-2}{3}}^{\sqrt{y+4}-2} f(x, y) dx.$$

- (c)

$$\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy.$$

- (d)

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}+2}^{\sqrt{y}+2} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_y^{\sqrt{y}+2} f(x, y) dx.$$

- 20.

$$\int_0^1 dx \int_0^2 x^2 y e^{xy} dy = 2.$$

- 21.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{-2x}^{\sqrt{x}} \frac{y}{x\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{\pi}{12} + \sqrt{3} - 2.$$

22.

$$\int_0^2 dy \int_y^{\sqrt{2y}} \frac{x}{x^2 + y^2} dx = \ln 2.$$

23.

$$\int_0^\pi dx \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x dy = \frac{4}{3}.$$

24. $\frac{12}{5}$.

25. (a)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

(b)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

26.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^3 dr = 6\pi a^4$$

(Namig: 2x uporabi formulo $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$)

27.

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^e \frac{\ln r^2}{r} dr = 2\pi.$$

28.

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-1}).$$

29.

$$I_0 = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx = 14a^4.$$

30. Težišče lika je v točki $T(\frac{2}{5}, 0)$, njegova ploščina pa je enaka

$$pl = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{4x+4}}^{\sqrt{4x+4}} dy + \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{-2x+4}}^{\sqrt{-2x+4}} dy = 8.$$

31.

$$I_y = \int_0^3 dy \int_{\frac{2}{3}y}^{\frac{9-y}{3}} x^2 dx = \frac{57}{4}.$$

32.

$$\int_0^1 (5t^4 + 2t) dt = 2.$$

33.

$$\int_0^1 (6t^5 + 4t^3) dt = 2.$$

34. $\int_0^\pi (-ab^2 \sin^3 x + a^2 b \cos^3 x) dx = -\frac{4}{3}a^2 b$

35.

$$\begin{aligned} pl &= \frac{1}{2} \int x dy - y dx \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} ((2 \cos t - 2 \cos 2t)(\cos t - \cos 2t) - (\sin 2t - \sin t)(2 \sin t - \sin 2t)) dt \\ &= 6\pi a^2. \end{aligned}$$

36. $y = e^{-x} - x + 1.$

37. $y = \sin x - 1.$

38. $y = (1 - \cos x) \sin x.$

39. (a) $y(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{5x}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

(b) $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{7x} + C_4 e^{2x}, C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

(c) $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

(d) $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} \cos 2x + C_3 e^{-x} \sin 2x, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$