PRIIMEK	IME	VPISNA ŠTEVILKA	SMER

NALOGA	TOČKE
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
SKUPAJ	

Popravni kolokvij iz predmeta MATEMATIČNA ANALIZA 3

11.4.2003

Točkovanje: 10+20+15+35+20=100

1.
(a) Napišite kodo, ki izračuna dolžino krivulje podane s parametrizacijo

$$\vec{r}\,(t) = (\cos t, \sin t, t),\ t \in [0, 2\pi]$$

(b) Narišite rezultat naslednje kode

$$\{\mathrm{Plot}[x^2, \{x, -1, 1\}], \mathrm{Plot}[x, \{x, -1, 1\}]\};$$
$$\mathrm{Plot}[\{x^2, x\}, \{x, -1, 1\}]$$

2. Izračunajte težišče homogenega telesa

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \ (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq z^3\}$$

3. Zapišite enačbo krivulje, ki jo sestavljajo presečišča tangent krivulje $\vec{r}\,(t) = (t^2, t, t^3)$, $t > 0$, z ravnino $y = 0$. Poiščite fleksijo tako dobljene krivulje.

4. Skicirajte krivuljo $\Gamma = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 = 9,\ x^2 = 3z\}$ orientirano pozitivno, če jo gledamo iz točke $(0, 0, -10)$. Izračunajte

$$\oint_{\vec{\Gamma}} x\,dx + xz\,dy + y\,dz$$

direktno in z uporabo Stokesovega izreka.

5. Rešite začetni problem

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{2y^2 \ln x}{x} \qquad y(e) = \frac{1}{4 + 3e}$$

Rešitve

1. naloga

(a) $r[t\_] := \{Cos[t], Sin[t], t\};$
$Integrate[\sqrt{r'[t].r'[t]}, \{t, 0, 2\pi\}]$ ali $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r'[t].r'[t]}\, dt$

(b) 1.slika: graf funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$
2.slika: graf funkcije $f(x) = x$ na intervalu $[-1, 1]$
3.slika: grafa funkcij $f(x) = x^2$ in $f(x) = x$ na intervalu $[-1, 1]$

2. naloga

- vpeljemo sferične koordinate
- v sferičnih koordinatah se neenačba $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq z^3$ glasi $r \leq \sin^3 \psi$
- $m = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{\sin^3 \psi} r^2 \cos\psi \, dr = \ldots = \frac{\pi}{15}$
- ker je telo simetrično glede na ravnini $x = 0$ in $y = 0$ in homogeno, velja $x_t = y_t = 0$
- $z_t = \frac{1}{m} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{\sin^3 \psi} r^3 \cos\psi \sin\psi \, dr = \ldots = \frac{15}{28}$

3. naloga

- enačba tangente v točki $\overrightarrow{r}(t_0) = (t_0^2, t_0, t_0^3)$ se glasi $(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)) = (t_0^2 + 2t_0\lambda, t_0 + \lambda, t_0^3 + 3t_0^2\lambda)$
- presečišče z ravnino $y = 0$ dobimo pri pogoju $\lambda = -t_0$
- parametrizacija krivulje, ki jo sestavljajo presečišča tangent, je torej $\overrightarrow{p}(t) = (-t^2, 0, -2t^3)$
- fleksija krivulje $\overrightarrow{p}(t)$ je $\kappa(t) = \frac{3}{2t(1+9t^2)^{\frac{3}{2}}}$

4. naloga

- ker krivulja leži na valju s polmerom 3, katerega os sovpada z osjo z, jo lahko parametriziramo s polarnim kotom $\overrightarrow{r}(\varphi) = (3\cos\varphi, 3\sin\varphi, 3\cos^2\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (tretjo komponento dobimo iz zveze $x^2 = 3z$)
- orientacija krivulje $\overrightarrow{r}(\varphi)$ je nasprotna orientaciji $\overrightarrow{\Gamma}$, zato

  $$\oint\limits_{\overrightarrow{\Gamma}} x\, dx + xz\, dy + y\, dz = -\int\limits_0^{2\pi} [3\cos\varphi(-3\sin\varphi) + 3\cos\varphi\, 3\cos^2\varphi\, 3\cos\varphi + 3sin\varphi(-6\cos\varphi\sin\varphi)]\, d\varphi = \ldots = -\frac{81\pi}{4}$$

- uporabimo Stokesov izrek

  $$\oint\limits_{\overrightarrow{\Gamma}} x\, dx + xz\, dy + y\, dz = \iint\limits_{\overrightarrow{P}} (1 - x, 0, z)\, \overrightarrow{dS}$$

- ker je ploskev P graf funkcije $z(x, y) = \frac{x^2}{3}$, kjer je $(x, y) \in \Delta = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9\}$, jo lahko parametriziramo

  $\overrightarrow{f}(x, y) = (x, y, \frac{x^2}{3}),\ (x, y) \in \Delta$

  $\overrightarrow{f}_x \times \overrightarrow{f}_y = (-z_x, -z_y, 1) = (-\frac{2x}{3}, 0, 1)$ kaže navzgor in torej orientacija $\overrightarrow{f}_x \times \overrightarrow{f}_y$ ni skladna z orientacijo $\overrightarrow{P}$

  ploskovni integral lahko zapišemo kot dvojni integral, ki ga izračunamo z uporabo polarnih koordinat:

  $$\iint\limits_{\overrightarrow{P}} (1 - x, 0, z)\, \overrightarrow{dS} = -\iint\limits_{\Delta} (1 - x, 0, \frac{x^2}{3})(-\frac{2x}{3}, 0, 1)\, dx\, dy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 [r^2\cos^2\varphi - \frac{2r\cos\varphi}{3}] r\, dr = \ldots = -\frac{81\pi}{4}$$

- ploskev P lahko parametriziramo tudi s parametroma r in φ

  $\vec{f}\,(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \frac{r^2\cos^2\varphi}{3})$, $r \in [0,3]$, $\varphi \in [0,2\pi]$
  $\vec{f}_r \times \vec{f}_\varphi = (-\frac{2r^2\cos\varphi}{3}, 0, r)$ kaže navzgor in je torej orientacija $\vec{f}_r \times \vec{f}_\varphi$ nasprotna orientaciji $\vec{P}$

  ploskovni integral lahko zapišemo kot dvakratni integral:

  $$\iint\limits_{\vec{P}} (1-x,0,z)\,\vec{dS} = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 (1-r\cos\varphi, 0, \frac{r^2\cos^2\varphi}{3})(-\frac{2r^2\cos\varphi}{3}, 0, r)\,dr = \ldots = -\frac{81\pi}{4}$$

5. naloga

- $y' + \frac{y}{x} = \frac{2y^2\ln x}{x}$ je Bernoullijeva diferencialna enačba, ker je oblike $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$
- če vpeljemo novo spremenjivko $u = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y}$, dobimo linearno diferencialno enačbo $u' - \frac{u}{x} = -\frac{2\ln x}{x}$
- rešimo najprej homogeni del in nato z variacijo konstante poiščemo še partikularno rešitev ter dobimo splošno rešitev $u = Cx + 2(\ln x + 1)$
- splošna rešitev prvotne diferencialne enačbe je torej $y = \frac{1}{u} = \frac{1}{Cx+2(\ln x+1)}$
- rešitev začetnega problema je $y = \frac{1}{3x+2(\ln x+1)}$