PRIIMEK	IME	VPISNA ŠTEVILKA	SMER

NALOGA	TOČKE
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
SKUPAJ	

Popravni kolokvij iz predmeta MATEMATIČNA ANALIZA 3

22.1.2003

Točkovanje: 10+20+20+25+25=100

1.(a) Kaj je rezultat naslednje kode

$f[x\_] := x^2;$

$a = \int_0^1 f[x] dx;$

$b := \int_0^1 f[x] dx;$

$f[x\_] := x^3;$

$\{a, b\}$

(b) Narišite rezultat naslednje kode

$f[x\_] := x^3;$

$b := \text{Plot}[f[x], \{x, -1, 1\}];$

$f[x\_] := x^2;$

b

2. Izračunajte maso telesa

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\},$$

če je gostota enaka oddaljenosti od ravnine $z = 0$.

3. Pokaži, da je krivulja parametrizirana s $\vec{p}\,(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$, $t \geq 1$ ravninska. Zapiši enačbo te ravnine.

4. Izračunaj

$$\oint_{\vec{\Gamma}} (y + xe^{x^2})\, dx + xy^3\, dy + z^2\, dz,$$

kjer je Γ presek tistega dela elipsoida $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, ki leži v prvem oktantu, in ravnin $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. $\vec{\Gamma}$ je orientirana v smeri urinega kazalca, če jo gledamo iz izhodišča koordinatnega sistema.

5. Poiščite diferencialno enačbo družine

$$y = Ce^{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

in med ortogonalnimi trajektorijami poiščite tisto, ki gre skozi točko $T(1, \frac{1}{2})$.

Rešitve

1. naloga

(a) $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$

(b) graf funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$

2. naloga

- vpeljemo cilindrične koordinate
- $\rho(x, y, z) = |z|$
- poiščemo presečišče ploskev: ploskvi se sekata v krožnici $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 4, z = 2\}$
- $m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 r\, dr \int\limits_r^{6-r^2} z\, dz = \ldots = \frac{23\pi}{3}$

3. naloga

(a) Skozi tri nekolinearne točke $\vec{p}\,(1)$, $\vec{p}\,(2)$ in $\vec{p}\,(3)$ postavimo ravnino. V dobljeno ravnino $x - y + z = -1$ vstavimo krivuljo.

(b) Preverimo, da je krivulja ravninska ($\tau(t) = 0$). Krivulja leži v ravnini $x - y + z = -1$, ki jo lahko dobimo na dva načina:

- določimo tri nekolinearne točke, ki ležijo na krivulji in skoznje postavimo ravnino
- v poljubni točki na krivulji poiščemo pritisnjeno ravnino

4. naloga

- uporabimo Stokesov izrek

  $\oint\limits_{\vec{\Gamma}} (y + xe^{x^2})\, dx + xy^3\, dy + z^2\, dz = \iint\limits_{\vec{P}} (0, 0, y^3 - 1)\, \vec{dS}$
- ploskev P parametriziramo

  $\vec{f}\,(\varphi, \psi) = (\cos\varphi \cos\psi, 2\sin\varphi\cos\psi, \sin\psi)$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

  $\vec{f}_{\varphi} \times \vec{f}_{\psi} = (\ldots, \ldots, 2\sin\psi\cos\psi)$ kaže navzgor in je torej orientiran skladno s ploskvijo $\vec{P}$
- ploskovni integral lahko zapišemo kot dvakratni integral

  $\iint\limits_{\vec{P}} (0, 0, y^3 - 1)\, \vec{dS} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (0, 0, 8\sin^3\varphi\cos^3\psi - 1)(\ldots, \ldots, 2\sin\psi\cos\psi) d\psi$

  $= \ldots = \frac{32}{15} - \frac{\pi}{2}$

5. naloga

- iz enačbe družine in njenega odvoda dobimo diferencialno enačbo dane družine $y' = \frac{xy}{1-y^2}$
- diferencialno enačbo ortogonalnih trajektorij dobimo, če v prvotni diferencialni enačbi y' zamenjamo z $-\frac{1}{y'}$
- dobimo diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami $-\frac{1}{y'} = \frac{xy}{1-y^2}$, katere rešitev je družina krivulj $Cx^2 + y^2 = 1$
- krivulja, ki gre skozi točko $T(1, \frac{1}{2})$, ima enačbo $\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1$