PRIIMEK	IME	VPISNA ŠTEVILKA	SMER

NALOGA	TOČKE
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
SKUPAJ	

Popravni kolokvij iz predmeta MATEMATIČNA ANALIZA 3

29.1.2003

Točkovanje: 10+20+20+25+25=100

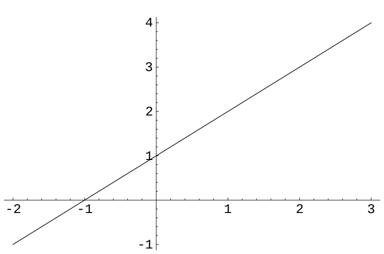
1. (a) Kaj je rezultat naslednje kode

$a = 2;$
$b = a + 3;$
$c := a + 3;$
$a = 1;$
$b - c$

(b) Dopolnite ukaz

{Plot[,{x, , }]

tako, da bo njegov rezultat naslednja slika



2. Skicirajte kroglo $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ in izračunajte njeno težišče, če je gostota enaka oddaljenosti od ravnine $z = 0$.

3. Čimbolj natančno narišite graf krivulje $x(t) = t^3 - 2t$, $y(t) = t^2 - 2$ in izračunajte ploščino zanke.

4. Skicirajte ploskev $P = \{(x, y, z);\ z = 5 - \sqrt{x^2 + y^2},\ 1 \leq z \leq 5\}$ orientirano tako, da njena normala v vsaki točki s pozitivno osjo z tvori ostri kot.
Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F} = (x + ye^z, x^2z^3 + \sin x^2, 2z)$ skozi $\vec{P}$.

5. Rešite

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 4xe^{-x} \qquad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$$

Rešitve

1. naloga

(a) 1

(b) Plot[1+x,{x,-2,3}]

2. naloga

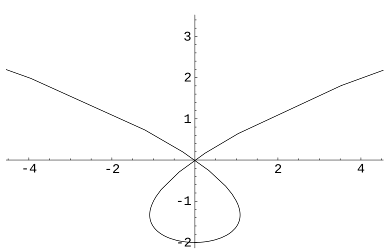
- vpeljemo sferične koordinate
- v sferičnih koordinatah se neenačba $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ glasi $r \leq 2\sin\psi$
- $\rho(x, y, z) = |z|$
- $m = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{2\sin\psi} r^3 \sin\psi \cos\psi \, dr = \ldots = \frac{4\pi}{3}$
- ker je telo simetrično glede na ravnini $x = 0$ in $y = 0$ in je gostota neodvisna od spremenjivk x in y, velja $x_t = y_t = 0$
- $z_t = \frac{1}{m} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{2\sin\psi} r^4 \sin^2\psi \cos\psi \, dr = \ldots = \frac{6}{5}$

3. naloga

- poiščemo definicijsko območje, ničle in stacionarne točke funkcij $x(t)$ in $y(t)$ ter podatke zapišemo v tabelo

t	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{2}$		∞
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
$y(t)$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

- izračunamo $y'(t) = \varphi(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} = \frac{2t}{3t^2-2}$ in $y''(t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{-4-6t^2}{(3t^2-2)^2}$ (krivulja je torej konveksna, ko velja $3t^2 - 2 < 0$)
- narišemo graf krivulje



- ploščina zanke je zaradi njene negativne orientacije
$pl = -\frac{1}{2} \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)] \, dt = \ldots = \frac{32\sqrt{2}}{15}$

4. naloga

- ploskev $\overrightarrow{P}$ je tisti del plašča stožca z vrhom v $(0, 0, 5)$, ki leži nad ravnino $z = 1$, in njena normala v poljubni točki kaže navzgor
- če ploskev $\overrightarrow{P}$ dopolnimo s ploskvijo $D = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y) \in \Delta\}$, kjer je $\Delta = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 16\}$, in jo orientiramo z normalo $\overrightarrow{n} = (0, 0, -1)$, dobimo rob stožca G orientiran z zunanjo normalo

- uporabimo Gaussov izrek

$$\iint\limits_{\vec{P}+\vec{D}} \vec{F} d\vec{S} = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \vec{F}\, dV \Rightarrow$$

$$\iint\limits_{\vec{P}} \vec{F} d\vec{S} = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \vec{F}\, dV - \iint\limits_{\vec{D}} \vec{F} d\vec{S} = \iiint\limits_{G} 3\, dV - \iint\limits_{\Delta} (\ldots, \ldots, 2)(0, 0, -1)\, dx\, dy = 3V(G) + 2pl(\Delta) = \ldots = 96\pi$$

5. naloga

- $y'' + 4y' + 3y = 4xe^{-x}$ je linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti
- najprej rešimo prirejeno homogeno diferencialno enačbo $y'' + 4y' + 3y = 0$ z nastavkom $y = e^{\lambda x}$
- dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ z rešitvama $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = -3$
- splošna rešitev homogene diferencialne enačbe je torej oblike $y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$
- ker je desna stran $f(x) = 4xe^{-x}$ oblike $P(x)e^{\alpha x}$, kjer je $P(x)$ polinom stopnje 1 in je $\alpha = -1$ enkratna ničla karakteristične enačbe, je nastavek za partikularno rešitev $y_P = x(Ax + B)e^{-x}$
- nastavek $y_P = x(Ax + B)e^{-x}$ uporabimo v diferencialni enačbi in z izenačitvijo koeficientov dobimo $A = 1$, $B = -1$ ter splošno rešitev $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + (x^2 - x)e^{-x}$
- če upoštevamo še začetna pogoja, dobimo rešitev začetnega problema $y = (x^2 - x + \frac{1}{2})e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$