

## Dodatne naloge za DOLOČENI INTEGRAL (in UPORABA)

1. Izračunaj določeni integral.

- a.)  $\int_1^2 (x^2 + x^{-4}) dx$     b.)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$     c.)  $\int_{-1}^1 x e^x dx$     d.)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x) dx$   
 e.)  $\int_1^{e^2} \ln x dx$     f.)  $\int_0^1 \arctg x dx$     g.)  $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-2x+2} dx$     h.)  $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$   
 i.)  $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2+2} dx$     j.)  $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$     k.)  $\int_0^1 \ln(x+1) dx$     l.)  $\int_0^4 x|x-2| dx$   
 m.)  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

R: a.)  $\frac{21}{8}$ , b.)  $\frac{\pi}{2} - 2$ , c.)  $\frac{2}{e}$ , d.)  $\frac{1}{3}$ , e.)  $e^2 + 1$ , f.)  $(\pi - \ln 4)/4$ , g.)  $\frac{3\pi}{4} - \ln 2$ , h.)  $3 \arcsin \sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{27}{2}$ , i.) 0, j.)  $1 + \ln \frac{2}{1+e}$ , k.)  $2 \ln 2 - 1$ , l.) 8, m.)  $2 - \frac{\pi}{2}$

2. Pri prejšnji nalogi za vsako točko razmisli, ali je vrednost določenega integrala tudi enaka ploščini lika, ki ga omejuje graf funkcije in os  $x$  na danem intervalu.

R: Vrednost integrala in ploščina sovpadata pri vseh točkah, razen pri (c.)

3. Ugotovi ali naslednji posplošeni integrali konvergirajo in jih izračunaj.

- a.)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+5} dx$     b.)  $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$     c.)  $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$     d.)  $\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$

R: a.)  $\pi$ , b.) divergira, c.)  $e$ , d.)  $\frac{\pi}{2} + \ln 2$

4. Izračunaj ploščino lika, ki ga določata krivulja  $y = x^3 - x^2 - 2x$  ter os  $x$ .

R:  $\frac{37}{12}$

5. Izračunaj ploščino lika, omejenega s krivuljama:  $y_1 = 2x^2 e^x$  in  $y_2 = -x e^x$ .

R:  $3 - \frac{5\sqrt{e}}{e}$

6. Izračunaj ploščino lika, ki ga tvorijo parabola  $y = -x^2 + 4x - 3$  ter njeni tangenti v točkah  $(0, y_1)$  in  $(3, y_2)$

R:  $\frac{9}{4}$

7. Izračunaj volumen teles, ki jih dobimo z rotacijo lika  $L$  okrog osi  $x$ , kjer je lik  $L$  je omejen z:

- a.)  $y = x, y = x^2$   
 b.)  $y = 2x - x^2$  in  $x$ -os  
 c.)  $y = x e^x, x = 1, x = -1, y = 0$

R: a.)  $\frac{2}{15}\pi$ , b.)  $\frac{4}{15}\pi$ , c.)  $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$

8. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z rotiranjem zgornjega dela lika, ki ga "odreže" premica z enačbo  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  od krožnice z enačbo  $x^2 + y^2 = 1$ .

R:  $\frac{\pi}{6}$

9. Izračunaj volumen rotacijskega telesa funkcije  $y = x^2 + 1$  na intervalu  $[0, 1]$  okrog: (Nasvet: Nariši skico!)

- a.) osi  $x$   
 b.) osi  $y$   
 c.) premice  $y = 1$

R: a.)  $\frac{28\pi}{15}$ , b.)  $\frac{\pi}{2}$ , c.)  $\frac{\pi}{5}$

10. Kolikšna je dolžina loka krivulje  $f(x) = \ln(1 - x^2)$  za  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ?

R:  $\frac{1}{2} - \ln 3$

11. Izračunaj dolžino loka krivulje  $y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2$  za  $0 \leq x \leq 4$ ?

R:  $\frac{8}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

12. Podan je funkcijski predpis funkcije  $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$ .

(a) Zapiši definicijsko območje, upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in skiciraj graf funkcije.

(b) Izračunaj dolžino krivulje  $y = f(x)$  za  $|x| \leq \frac{1}{2}$ .

R: b.)  $2 \ln 3 - 1$

13. Poišči prostornino telesa, ki nastane z vrtenjem lika pod krivuljo  $y = 2\sqrt{(1-x)^3x}$  za  $0 \leq x \leq 1$  okoli abscisne osi.

R:  $\frac{9\pi}{5}$

## Numerična integracija

14. S pomočjo sestavljene trapezne formule izračunaj približek za  $\ln 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  tako, da razdeliš integracijski interval na 8 podintervalov. Ocení napako!

R:  $\ln 2 \approx 0,6956\dots$ , napaka  $R \leq \frac{1}{6 \cdot 2^5} \approx 0,0066$

15. S pomočjo Taylorjeve formule izračunaj vrednost  $\int_0^1 \sin(x^2)dx$  na štiri decimalna mesta natančno.

R:  $\frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!}$